Mechanika Kwantowa
kurs dla doktorantów
zestaw 12
18 styczeń 2005

1. Wykazać, że funkcjonał
$$F = m\frac{1}{\epsilon}(x_{k+1} - x_k)$$
definiuje kwantowy operator pędu, w tym sensie, że
$$<\chi|F|\psi>_S = \int dx\, \chi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx}\right).$$
W tym celu rozważyć ewolucję funkcji falowej o jeden krok ε, tj. od t do $t+\varepsilon$.

2. Wyprowadzić relację komutacji operatorów pędu i położenia wyliczając:
$$< \chi|m\frac{1}{\epsilon}\left((x_{k+1} - x_k)x_k - x_{k+1}(x_{k+1} - x_k)\right)|\psi >,$$
gdzie
$$<\chi|F|\psi>_S = \int\int \chi^*(x_2) \int [\mathcal{D}x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}\, F[x(t)]\, \psi(x_1)\, dx_2 dx_1\,.$$

3. Energia kinetyczna. Proszę przeczytać z podręcznika Feynmana Hibbsa rozdział 7-3 zwracając szczególną uwagę na problem definicji energii kinetycznej.

   W następującym uogólnieniu propagatora:
$$\begin{aligned} <1> \;=\; & \int \ldots \int \left(\frac{m_1}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2} dx_1 \ldots \left(\frac{m_{n-1}}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2} dx_{n-1} \left(\frac{m_n}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2} \\ & \exp\left\{\frac{1}{\hbar}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2\epsilon} - \epsilon V(x_i)\right)\right\}, \end{aligned}$$
   można zmieniać m_i niezależnie od pozostałych mas. Kładąc wszystkie masy równe m, odzyskuje się standardową postać propagatora. Należy obliczyć zmianę propagatora, wywołaną przeskalowaniem i-tej masy m_i: $m_i \to m_i(1+\eta)$ dla małych η.