Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów

zestaw 11

11 styczeń 2005

1. Dokończyć ostatnie zadanie z poprzedniego zestawu.

2. W podręczniku Feynmana-Hibbsa wyprowadzona jest tożsamość:

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x(s)} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x(s)} \right\rangle_S ,$$

która w wersji zdyskretyzowanej przyjmuje postać

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\partial S}{\partial x_k} \right\rangle_S ,$$

gdzie

$$\langle F \rangle_S = \int [\mathcal{D}x(t)] \, F[x(t)] \, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \, .$$

Korzystając z tej toższmości pokazać, że dla cząstki w 3 wymiarach:

$$< (x_{k+1} - x_k)^2 > = < (y_{k+1} - y_k)^2 > = < (z_{k+1} - z_k)^2 > = \frac{i\epsilon\hbar}{m},$$

$$< (x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k) > = < (z_{k+1} - z_k)(y_{k+1} - y_k) > = < (x_{k+1} - x_k)(z_{k+1} - z_k) > = 0.$$

3. Wyprowadzić relację komutacji operatorów pędu i położenia wyliczając:

$$< \chi | m \frac{1}{\epsilon} \left((x_{k+1} - x_k) x_k - x_{k+1} (x_{k+1} - x_k) \right) | \psi >,$$

gdzie

$$<\chi|F|\psi>_S = \int \int \chi^*(x_2) \int [\mathcal{D}x(t)] \, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \, F[x(t)] \, \psi(x_1) \, dx_2 dx_1 \, .$$

4. Energia kinetyczna. Proszę przeczytać z podręcznika Feynmana Hibbsa rozdział 7-3 zwracając szczególną uwagę na problem definicji energii kinetycznej.

   W następującym uogólnieniu propagatora:

$$\begin{aligned} < 1 > \; = \; & \int \dots \int \left(\frac{m_1}{2\pi i\hbar\epsilon} \right)^{1/2} dx_1 \dots \left(\frac{m_{n-1}}{2\pi i\hbar\epsilon} \right)^{1/2} dx_{n-1} \left(\frac{m_n}{2\pi i\hbar\epsilon} \right)^{1/2} \\ & \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2\epsilon} - \epsilon V(x_i) \right) \right\} , \end{aligned}$$

   można zmieniać m_i niezależnie od pozostałych mas. Kładąc wszystkie masy równe m, odzyskuje się standardową postać propagatora. Należy obliczyć zmianę propagatora, wywołaną przeskalowaniem i-tej masy m_i: $m_i \to m_i(1 + \eta)$ dla małych η.