# Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 8

7.12.2004

1. *Wyznacznik instantonowy.* Celem tego zadania jest wyliczenie jawnym rachunkiem czynnika

$$\tilde{K} = \frac{\det'\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + \mathrm{V}''(\bar{\mathrm{x}}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + 1\right)},$$

gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$. Prim przy wyznaczniku oznacza, że z wyznacznika wyrzucamy zerową wartość własną, $\bar{x}(\tau)$ jest trajektorią klasyczną.

WSKAZÓWKA:

- Proszę najpierw znaleźć trajektorię klasyczną dla ruchu o zerowej energii od $-a$ do $a$ w odwróconym potencjale $-V(x)$. Proszę wyliczyć działanie klasyczne.
- Proszę pokazać, że równanie na wartości własne

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau). \tag{1}$$

  odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $1/\cosh^2(\tau/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str 88 w wydaniu polskim PWN 1979).
- Proszę znaleźć spektrum stanów związanych dla tego równania. Warto postąpić nieco inaczej niż w podręczniku Landaua i Lifszica, przyjmując

$$y_n(\tau) = e^{\alpha\tau} w_n(\tau),$$

  gdzie współczynnik $\alpha$ należy wyliczyć przez podstawienie do równania (1). Następnie opłaca się wprowadzić zmienną $z = \tanh(\tau/2)$, a następnie $u = (1+z)/2$ . W ten sposób równanie (1) można sprowadzić do równania hipergeometrycznego, którego rozwiązanie jest wielomianem.
- Przyczynek od spektrum ciągłego wyliczymy na następnych ćwiczeniach.
- Literatura: S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1988), Section 7, Appendix 1.

  A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, V.A. Novikov and M.A. Shifman, *ABC of Instantons*, Sov. Phys. Usp. **24**, 195 (1982) [Usp. Fiz. Nauk **136**, 553 (1982)].

  T. Schafer and E.V. Shuryak, *Instantons in QCD*, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323 [arXiv:hep-ph/9610451].