Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 7

23.11.2004 - wyjątkowo godz 8:30

1. Pokazać, że funkcja falowa dana wzorem

$$\psi(x_2,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x_2,t_2;x_1,t_1)\psi(x_1,t_1)\,dx_1,$$

gdzie K jest dane jako całka po trajektoriach, spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2=t_1+\epsilon$, gdzie ϵ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach. Z kolei $x_1=x_2-\eta$. Przedyskutować związek między η a ϵ i przeprowadzić rozwinięcie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1).

2. Wychodząc z równania Schrödingera dla propagatora K:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x,x_0;t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]K(x,x_0;t),$$

gdzie K spełnia warunek $K(x,x_0;t\to 0)=\delta(x-x_0)$, wyprowadzić formułę Van Vleck'a:

$$F(T)=\left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}\right)^{1/2}.$$

Wskazówka: Wstawić do równania Schrödingera:

$$K=\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{cl}}+\ln F+\dots\right)$$

i pogrupować wyrazy przy potęgach $\hbar$. W rzędzie zerowym dostaje się równanie Hamiltona-Jacobiego na działanie klasyczne:

$$\partial_t S+\frac{1}{2m}(\partial_x S)^2+V(x)=0,$$

a w pierwszym rzędzie równanie:

$$\partial_t(\ln F)+\frac{1}{2m}\partial_x^2 S+\frac{1}{m}\partial_x S\partial_x(\ln F)=0.$$

Równanie to należy rozwiązać ze względu na $\ln F$. Można to zrobić zauważając, że różniczkując równanie Hamiltona-Jacobiego po x i po x_0 otrzymuje się równanie identyczne z równaniem rzędu $\hbar$, w którym $\ln F$ zastąpiono przez $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}$. Współczynnik proporcjonalności można wyznaczyć z warunku unormowania propagatora w granicy $t\to 0$.