Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 3 -26.10.2004

1. Proszę wyliczyć klasyczne działanie dla oscylatora harmonicznego. Przedyskutować osobliwości pojawiające się w tym działaniu.

2. Wyliczyć propagator K dla swobodnego oscylatora harmonicznego. W tym celu należy oprócz działania klasycznego z poprzedniego zadania wyliczyć dodatkowo czynnik mnożący eksponentę. W tym celu należy wyliczyć spektrum operatora

$$D(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''[\bar{x}(\tau)]$$

gdzie V jest potencjałem, a $\bar{x}$ trajektorią klasyczną. Spektrum D dostajemy zmykając układ w "pudle":

$$\begin{aligned} D(\tau)y_n(\tau) &= \lambda_n y_n(\tau), \\ y_n(\pm\frac{T}{2}) &= 0. \end{aligned}$$

Po znalezieniu λ_n należy z iloczynu $\prod_n \lambda_n$ wyodrębnić część zależną od ω (częstość oscylatora) i część niezależną od ω. Część zależna od ω daje się jawnie wymnożyć, a część niezależna jest pewną stałą, którą można odczytać z porównania z propagatorem cząstki swobodnej w granicy $\omega \to 0$.

3. Porównując ogólny wzór na propagator oscylatora harmonicznego

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2)\psi_n^*(x_1) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t_2 - t_1)\right)$$

z wyprowadzonym wcześniej jawnym wzorem na K znaleźć pierwsze dwie funkcje własne oscylatora $\psi_{1,2}$.