Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 2 – 14.10.2004

ćwiczenia odbędą się wyjątkowo we czwartek, 14.10. o godz. 10:15
w bibliotece preprintów na IV p.

1. Udowodnić, że

$$e^{H_0+V} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \prod_{i=1}^{n+1} d\alpha_i \, \delta(1 - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k) e^{\alpha_1 H_0} V e^{\alpha_2 H_0} V \ldots V e^{\alpha_{n+1} H_0} \ . \tag{1}$$

   Dowód przeprowadza się wprowadzając „na chwilę” parametr t: $H_0 + tV$ i stosując rozwinięcie Taylora wokół $t = 1$. Można też skorzystać z wyprowadzonego już wzoru na $de^{C(t)}/dt$.

2. Wyprowadzić wzór z poprzedniego zadania przy pomocy równania różniczkowego. W tym celu definiujemy

$$\rho_0(\beta) = e^{\beta H_0}, \qquad \rho(\beta) = e^{\beta(H_0+V)}$$

   i konstruujemy r. różniczkowe

$$\frac{d}{d\beta}\left(e^{-\beta H_0}\rho(\beta)\right) = e^{-\beta H_0} V \rho(\beta),$$

   które należy scałkować po β' w granicach 0 do β. Otrzymane w ten sposób r. całkowe należy rozwiązać iteracyjnie. Wzór (1) otrzymuje się przez zmianę zmiennych całkowania i położenie $\beta = 1$.

3. Proszę sprawdzić, że dla $[V, H_0] = 0$ wzór (1) redukuje się do wzoru

$$e^{H_0+V} = e^{H_0} e^V.$$