

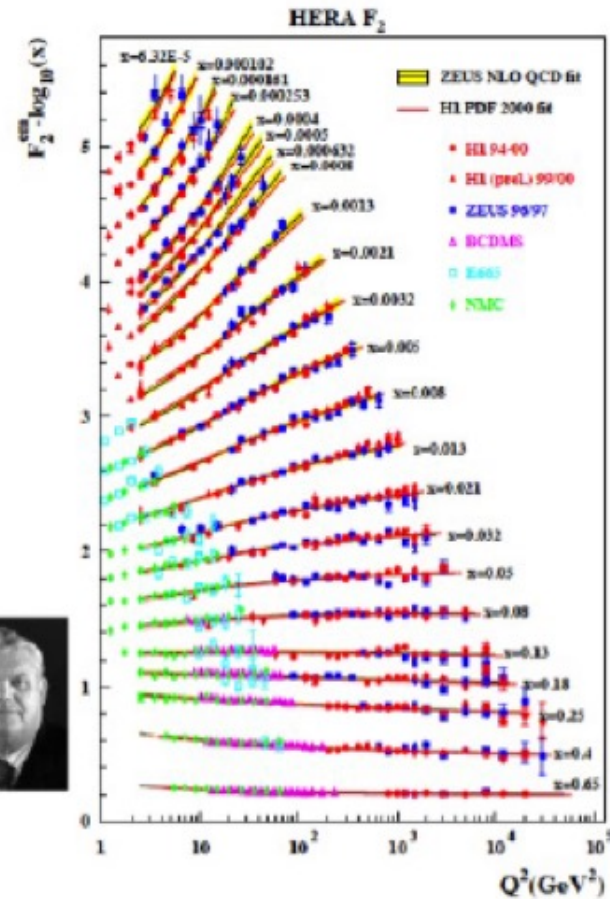
# Rozpraszanie głęboko nieelastyczne $ep$ (deep inelastic scattering)

1968: following James Bjorken suggestions MIT-SLAC experiment confirmed  $x$  scaling

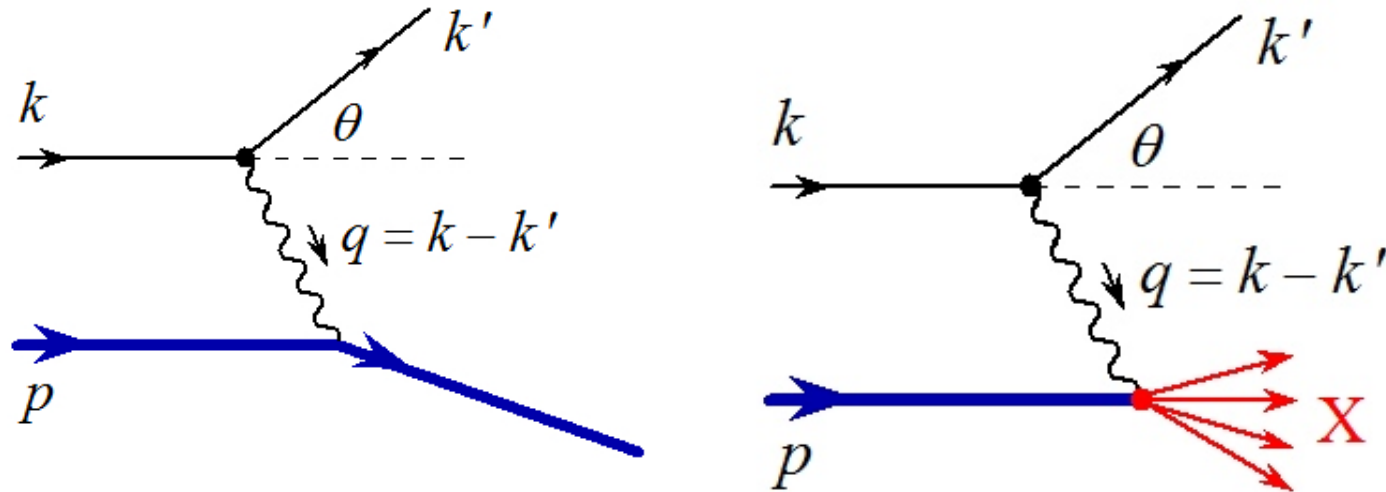
interpretation: Richard Feynman

Nobel 1990:

Jerome Friedman (MIT)  
Henry Kendall (MIT)  
Richard Taylor (SLAC)



## Rozpraszanie elastyczne i nieelastyczne



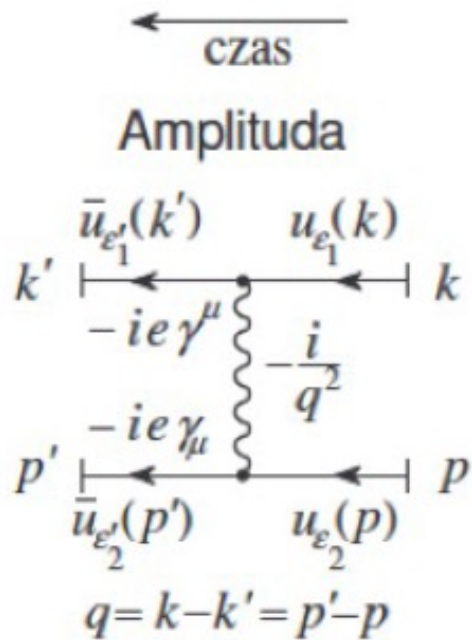
W rozpraszaniu nieelastycznym są dwie zmienne niezależne: przekaz czteropędu i energii:

$$q^2 = -2\omega\omega'(1 - \cos\theta) = -4\omega\omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \nu = \omega - \omega'$$

W rozpraszaniu elastycznym tylko przekaz czteropędu:

$$\delta((p + q)^2 - M^2) = \delta(2M\nu - Q^2) = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right).$$

# Rozpraszanie elastyczne dwóch różnych fermionów



$$p = M(1, 0, 0, 0),$$

$$k = \omega(1, 0, 0, 1),$$

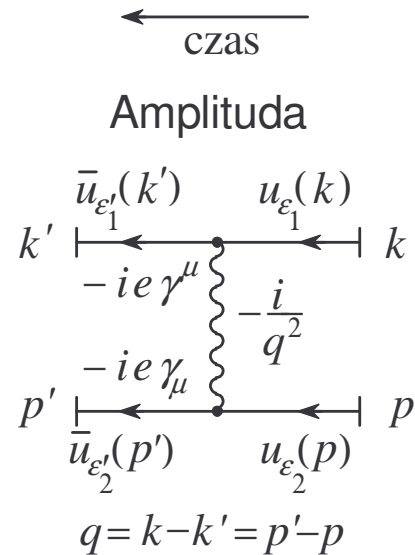
$$k' = \omega'(1, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta),$$

$$q = k - k' = p' - p.$$

Zauważmy, że przekaz czteropędu

$$q^2 = -2\omega\omega'(1 - \cos \theta) = -4\omega\omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

## Rozpraszanie elastyczne – przekrój czynny



$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^4k'}{(2\pi)^3} \delta(k'^2) \frac{d^4p'}{(2\pi)^3} \delta(p'^2 - M^2) (2\pi)^4 \delta(k + p - k' - p').$$

- wykonać całki z pomocą delt Diraka
- obliczyć  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$

## Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{d\omega' d^3k' \delta(\omega'^2 - k'^2)}_{=I} \delta((p+q)^2 - M^2)$$

## Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{d\omega' d^3 k' \delta(\omega'^2 - k'^2)}_{=I} \delta((p+q)^2 - M^2)$$

$$\begin{aligned} I &= \int d\omega' d^3 \vec{k}' \delta(\omega'^2 - k'^2) = \int k'^2 dk' d\varphi d \cos \theta d\omega' \delta(\omega'^2 - k'^2) \\ &= 2\pi \int d \cos \theta \frac{\omega'^2 d\omega'}{2\omega'} = \pi \int \omega' d\omega' d \cos \theta \end{aligned}$$

## Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{d\omega' d^3 k' \delta(\omega'^2 - k'^2)}_{=I} \delta((p+q)^2 - M^2)$$

$$\begin{aligned} I &= \int d\omega' d^3 \vec{k}' \delta(\omega'^2 - k'^2) = \int k'^2 dk' d\varphi d \cos \theta d\omega' \delta(\omega'^2 - k'^2) \\ &= 2\pi \int d \cos \theta \frac{\omega'^2 d\omega'}{2\omega'} = \pi \int \omega' d\omega' d \cos \theta \end{aligned}$$

Wygodniej będzie posługiwać się innymi zmiennymi:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2 = 2\omega\omega'(1 - \cos \theta), \\ \nu &= \omega - \omega' \end{aligned}$$

## Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{d\omega' d^3 k' \delta(\omega'^2 - k'^2)}_{=I} \delta((p+q)^2 - M^2)$$

$$\begin{aligned} I &= \int d\omega' d^3 \vec{k}' \delta(\omega'^2 - k'^2) = \int k'^2 dk' d\varphi d \cos \theta d\omega' \delta(\omega'^2 - k'^2) \\ &= 2\pi \int d \cos \theta \frac{\omega'^2 d\omega'}{2\omega'} = \pi \int \omega' d\omega' d \cos \theta \end{aligned}$$

Wygodniej będzie posługiwać się innymi zmiennymi:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2 = 2\omega\omega'(1 - \cos \theta), \\ \nu &= \omega - \omega' \end{aligned}$$

Jacobian:

$$d\omega' d \cos \theta = \left| \frac{d(\omega', \cos \theta)}{d(\nu, Q^2)} \right| dQ^2 d\nu = \frac{1}{2\omega\omega'} dQ^2 d\nu \quad \rightarrow \quad I = \frac{\pi}{2\omega} \int dQ^2 d\nu$$



## Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{8M\omega^2} \frac{\pi}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dQ^2 d\nu \delta((p+q)^2 - M^2)$$

$$\delta((p+q)^2 - M^2) = \delta(2M\nu - Q^2) = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right).$$

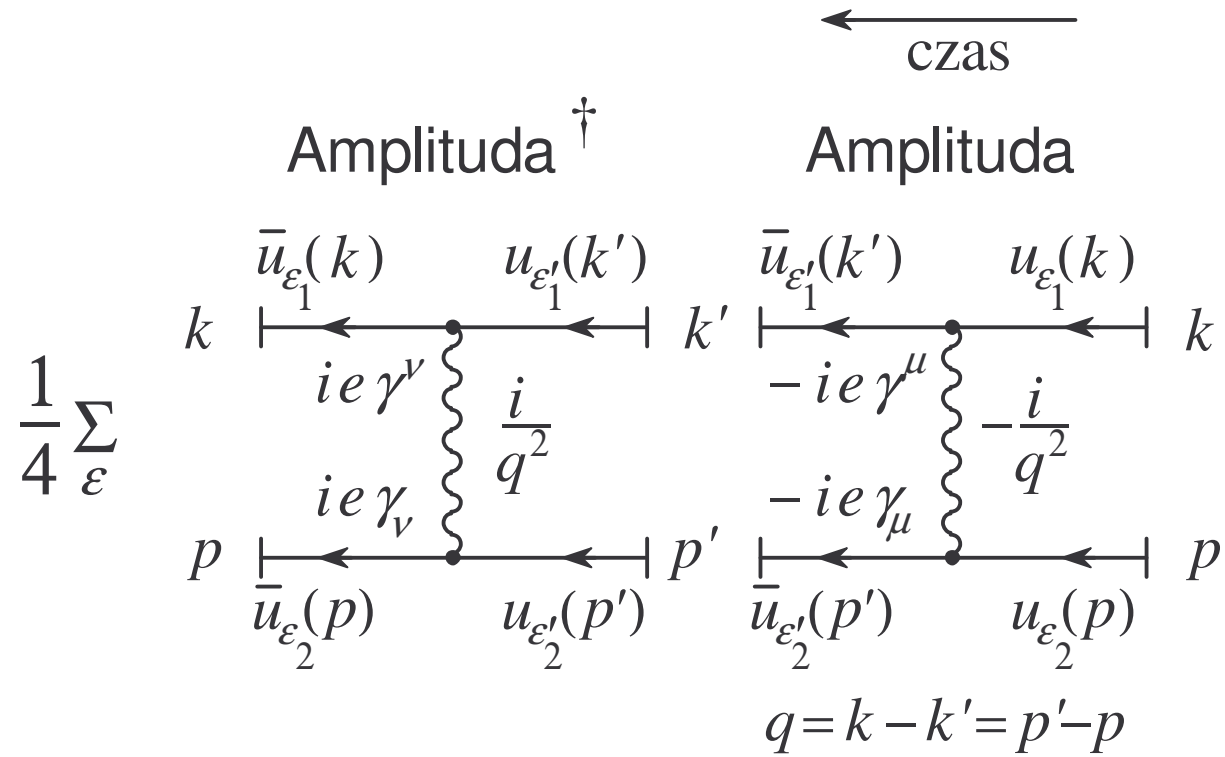
## Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{8M\omega^2} \frac{\pi}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dQ^2 d\nu \delta((p+q)^2 - M^2)$$

$$\delta((p+q)^2 - M^2) = \delta(2M\nu - Q^2) = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right).$$

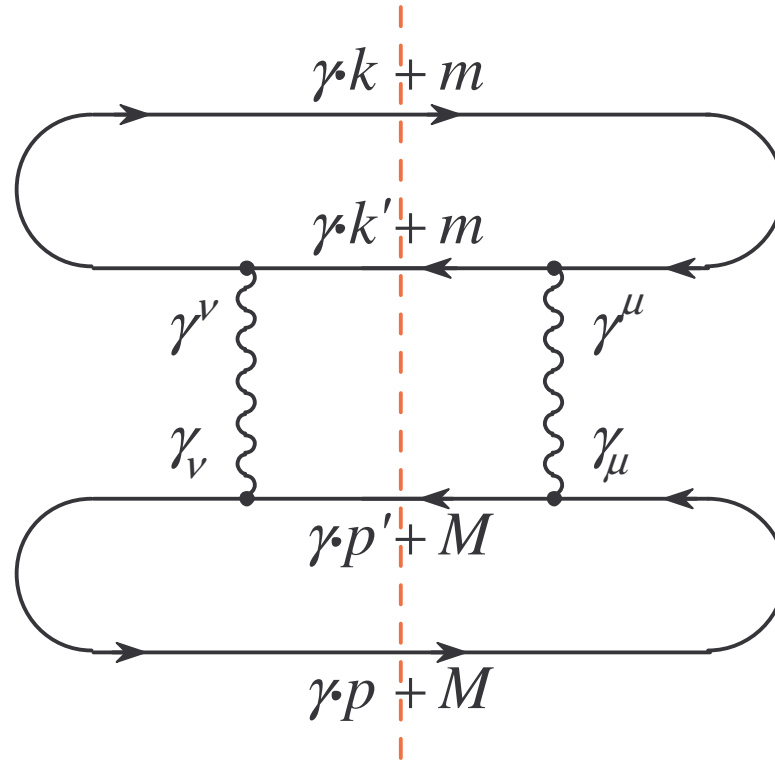
$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{16M^2\omega^2} \frac{1}{4\pi} \int d\nu \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

# Kwadrat $|\mathcal{M}_{fi}|^2$



$$\sum_{\epsilon} [u_{\epsilon}(p)]_{\alpha} [\bar{u}_{\epsilon}(p)]_{\beta} = (\gamma \cdot p + m)_{\alpha\beta}$$

Kwadrat  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$



$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e_1^2 e_2^2}{(q^2)^2} L^{\nu\mu}(k, k') L_{\nu\mu}(p, p').$$

## Kwadrat $|\mathcal{M}_{fi}|^2$

$$L_{\nu\mu}(p, q) = 4 \left( p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \left( p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) + q^2 \left( g_{\nu\mu} - \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} \right)$$

Niezmienniczość względem cechowania

$$q^\nu L_{\nu\mu} = q^\mu L_{\nu\mu} = 0$$

Możemy uprościć zapis

$$L_{\nu\mu}(p, p') = \mathcal{A} p^\nu p'^\mu + \mathcal{B} g^{\nu\mu} \quad \mathcal{A} = 4, \quad \mathcal{B} = q^2 = -Q^2$$

Analogicznie dla  $L^{\nu\mu}(k, k')$ . Wynik:

$$p_\nu p_\mu L^{\nu\mu}(k, k') = 4M^2 \omega \omega' \cos^2 \frac{\theta}{2}$$
$$g_{\nu\mu} L^{\nu\mu}(k, k') = -8\omega \omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

## Elastyczny przekrój czynny

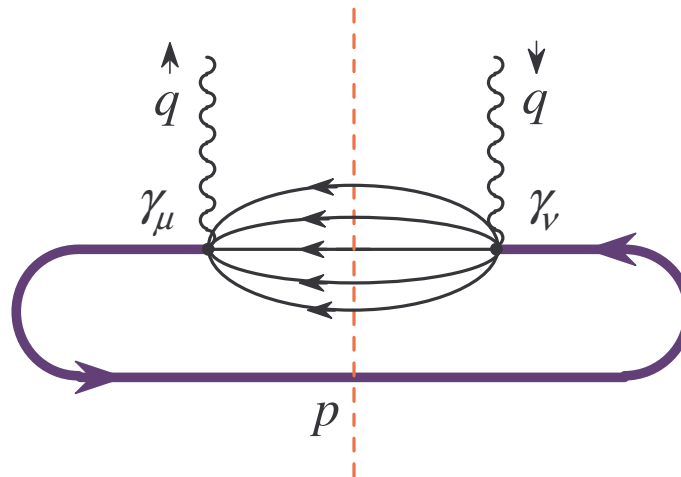
$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dQ^2} &= \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \int \frac{e_p^2}{\omega\omega'} \left\{ \frac{\mathcal{A}}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\mathcal{B}}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} d\nu \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right) \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{e_p^2}{\omega\omega'} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}.\end{aligned}$$

Uwagi:

- $$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$
- ładunek dolnego fermionu  $e e_p$
- zmienne  $\omega'$  i kąt rozproszenia  $\theta$  nie są niezależne

# Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – tensor hadronowy

Proton nie jest elementarny, rozpraszanie nie jest elastyczne  $(p + q)^2 \neq M^2$



Pamiętamy

$$L_{\mu\nu}(p, p') = 4 \left( p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left( p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) - q^2 \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

dla protonu

$$W_{\mu\nu}(p, q) = \underbrace{4W_2}_{\mathcal{A}} \left( p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left( p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) + \underbrace{4M^2 W_1}_{-\mathcal{B}} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

## Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – skalowanie Bjorkena

Dla protonu  $e_p = 1$ , rozkład w dwóch zmiennych - nie ma  $\delta(\nu - Q^2/2M)$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} &= \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^3\omega' \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ \frac{\mathcal{A}}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\mathcal{B}}{4M^2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^3\omega' \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}\end{aligned}$$

Okazuje się, że w granicy  $Q^2, \nu \rightarrow \infty$  ale  $Q^2/\nu$ -skończone, funkcje  $W_{1,2}$  nie zależą od dwóch zmiennych  $Q^2$  oraz  $\nu$ , a od jednej, zwanej  $x$  – Bjorkena

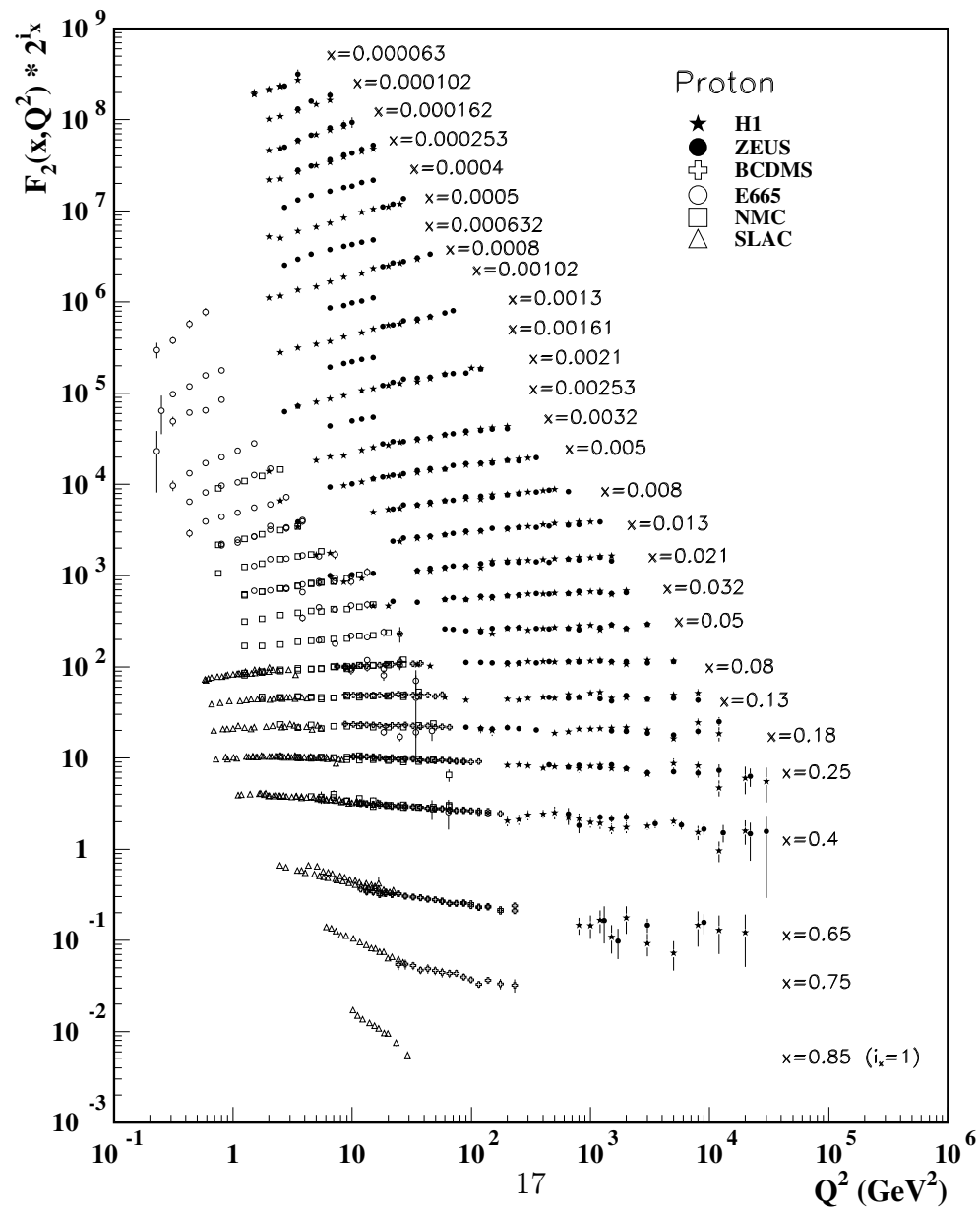
$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}$$

$$MW_1(Q^2, \nu) = F_1(x)$$

$$\nu W_2(Q^2, \nu) = F_2(x)$$

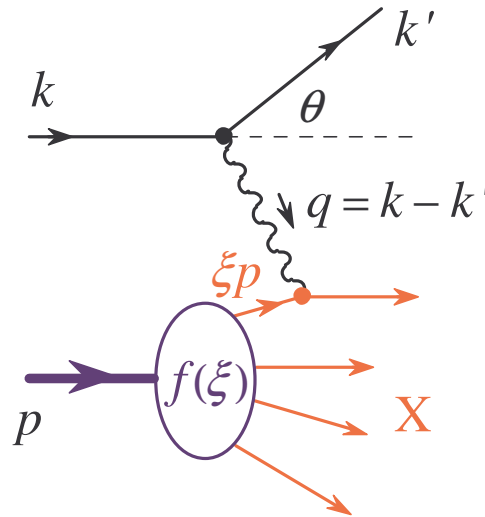
Skalowanie Bjorkena.





# Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – model partonów

Model partonów:



- czas fluktuacji protonu:  $\tau_p \sim 1/\Delta E$ , czas oddziaływania:  $\tau_{\text{coll}} \sim 1/\nu$ , wybieramy układ gdzie  $\tau_{\text{coll}} \ll \tau_p$
- $f(\xi)$  – prawd. znalezienia w protonie partonu o pędzie  $p_\xi = \xi p$  (rysunek mylący)
- stąd:  $0 < \xi < 1$
- przekrój czynny jest sumą po wszystkich partonach i całką po  $d\xi f(\xi)$ .

## Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – model partonów

Problem z kinematyką: partony są bezmasowe (lub mają małe masy), a my wybraliśmy

$$p = M(1, 0, 0, 0)$$

tzn., że masa partonu  $m_\xi = \xi M$ . Wtedy zachowanie czteropędu w wierzchołku

$$(\xi p + q)^2 = m_\xi^2$$

daje

$$\xi^2 M^2 + 2\xi M\nu - Q^2 = \xi^2 M^2 \rightarrow \xi = \frac{Q^2}{2M\nu} = x$$

Aby dostać przekrój czyny na takim partonie, należy we wzorze na rozpraszanie elastyczne zamienić

$$M \rightarrow \xi M$$

# Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – model partonów

Przekrój czynny

$$\left. \frac{d\sigma_i}{dQ^2 d\nu} \right|_{\text{partonowy}} = \frac{\pi\alpha^2 e_i^2}{4\omega^3 \omega' \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{4\xi_i^2 M^2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \delta \left( \nu - \frac{1}{\xi_i} \frac{Q^2}{2M} \right)$$

i dalej

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \sum_i \int d\xi_i f_i(\xi_i) \left. \frac{d\sigma_i}{dQ^2 d\nu} \right|_{\text{partonowy}} = \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^3 \omega' \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}$$

co daje ( $x = \frac{Q^2}{2M\nu}$ ):

$$W_2 = \sum_i e_i^2 \int d\xi f_i(\xi) \delta \left( \nu - \nu \frac{x}{\xi} \right) = \sum_i e_i^2 \int d\xi f_i(\xi) \frac{\xi^2}{\nu x} \delta(\xi - x) = \frac{1}{\nu} \sum_i e_i^2 x f_i(x)$$

$$W_1 = \sum_i e_i^2 \int d\xi f_i(\xi) \frac{Q^2}{4\xi^2 M^2} \frac{\xi^2}{\nu x} \delta(\xi - x) = \frac{1}{2M} \sum_i e_i^2 f_i(x).$$

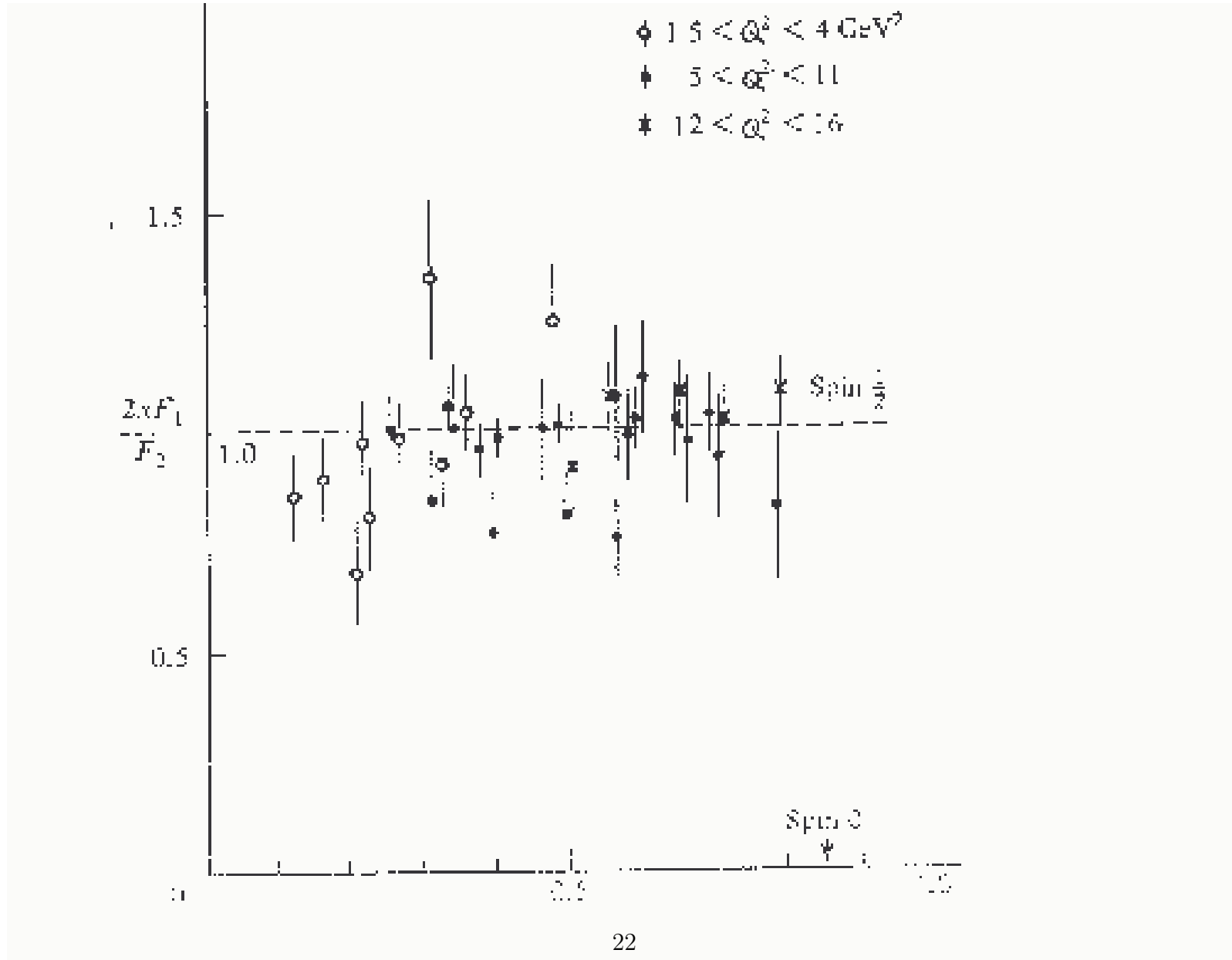
# Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – model partonów

Definiujemy

$$F_2(x) = \nu W_2 = x \sum_i e_i^2 f_i(x)$$
$$F_1(x) = MW_1 = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x)$$

Mamy pierwsze przewidywanie (relacja Callana-Grossa)

$$F_2(x) = 2xF_1(x)$$



## Kwarki jako partony

$$F_2^{\text{p}}(x) = \frac{4}{9}x [u_{\text{p}}(x) + \bar{u}_{\text{p}}(x)] + \frac{1}{9}x [d_{\text{p}}(x) + \bar{d}_{\text{p}}(x) + s_{\text{p}}(x) + \bar{s}_{\text{p}}(x)] ,$$

$$F_2^{\text{n}}(x) = \frac{4}{9}x [u_{\text{n}}(x) + \bar{u}_{\text{n}}(x)] + \frac{1}{9}x [d_{\text{n}}(x) + \bar{d}_{\text{n}}(x) + s_{\text{n}}(x) + \bar{s}_{\text{n}}(x)] .$$

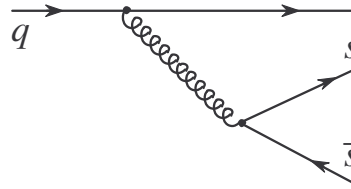
Dodatkowo, zakładając symetrię izospinową, przyjmujemy:

$$u_{\text{p}} = d_{\text{n}} = u, \quad d_{\text{p}} = u_{\text{n}} = d, \quad s_{\text{p}} = s_{\text{n}} = s.$$

## Własności rozkładów kwarkowych

Ponieważ neutron i proton nie mają dziwności kwarki dziwne mogą pojawić się jedynie w wyniku produkcji radiacyjnej (Rysunek 1). Prowadzi to do równania:

$$\int dx (s(x) - \bar{s}(x)) = 0.$$



Rysunek 1: Produkcja pary  $s\bar{s}$  w nukleonie.

Rozkłady kwarkowe spełniają szereg więzów. Całkowity ładunek protonu i neutronu ma postać:

$$q_p = \int dx \left[ \frac{2}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) - \frac{1}{3}(s(x) - \bar{s}(x)) \right] = 1$$

$$q_n = \int dx \left[ \frac{2}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) - \frac{1}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{3}(s(x) - \bar{s}(x)) \right] = 0$$

$\updownarrow = 0$



Rozwiązania:

$$\int dx(u(x) - \bar{u}(x)) = 2, \quad \int dx(d(x) - \bar{d}(x)) = 1, \quad \int dx(s(x) - \bar{s}(x)) = 0.$$

Kwarki walencyjne i kwarki morza:

$$u = u_v + q_s, \quad d = d_v + q_s, \quad \bar{u} = \bar{d} = \bar{s} = s = q_s$$

co daje

$$\int dx u_v(x) = 2, \quad \int dx d_v(x) = 1$$

Rozkłady kwarków są znormalizowane do ich liczby.

Pęd protonu:

$$\int dx x(u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) = 1 - \varepsilon.$$

Okazuje się, że  $\varepsilon \sim 45\%$ . Co niesie resztę pędu? Gluony.

## Reguła Gottfrieda

$$2F_1^p(x) = \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] ,$$

$$2F_1^n(x) = \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] .$$

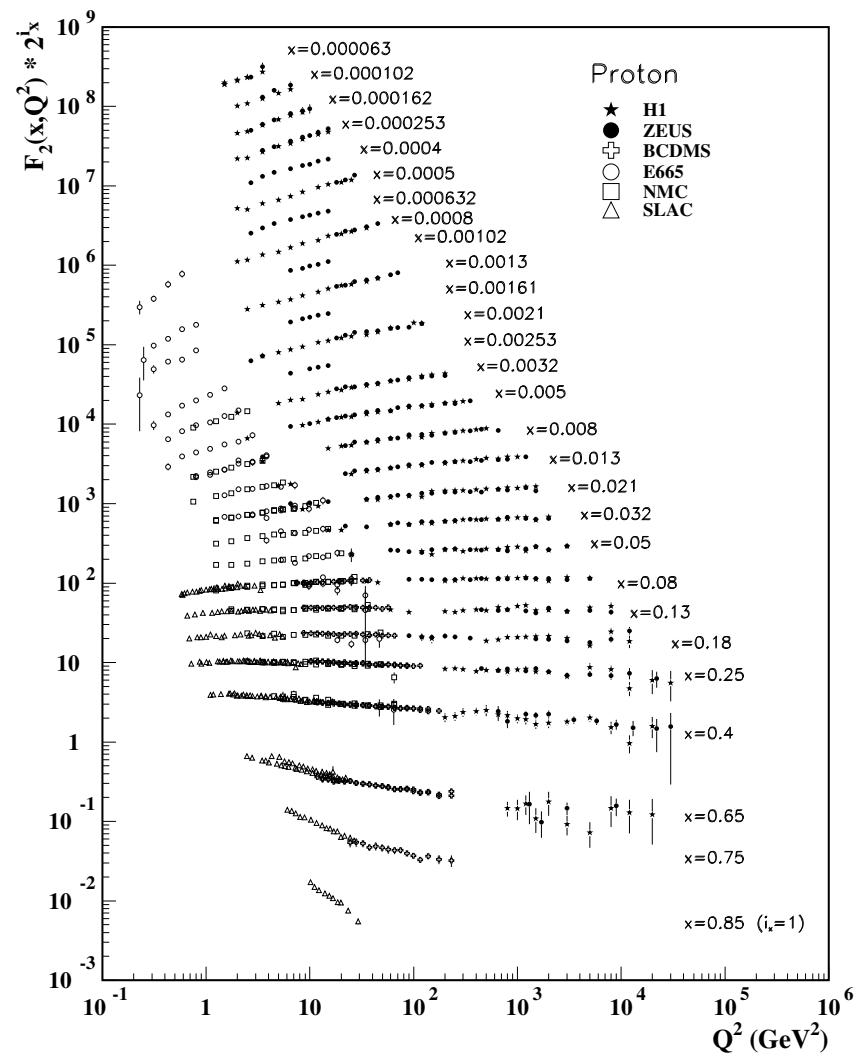
Policzmy różnicę

$$\begin{aligned} S_G &= \int dx (F_1^p(x) - F_1^n(x)) = \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{1}{3} [u(x) + \bar{u}(x)] - \frac{1}{3} [d(x) + \bar{d}(x)] \right) \\ &= \frac{1}{6} \int dx [u_v(x) - d_v(x)] + \frac{2}{6} \int dx [q_s(x) - \bar{q}_s(x)] = \frac{1}{6} \simeq 0.17. \end{aligned}$$

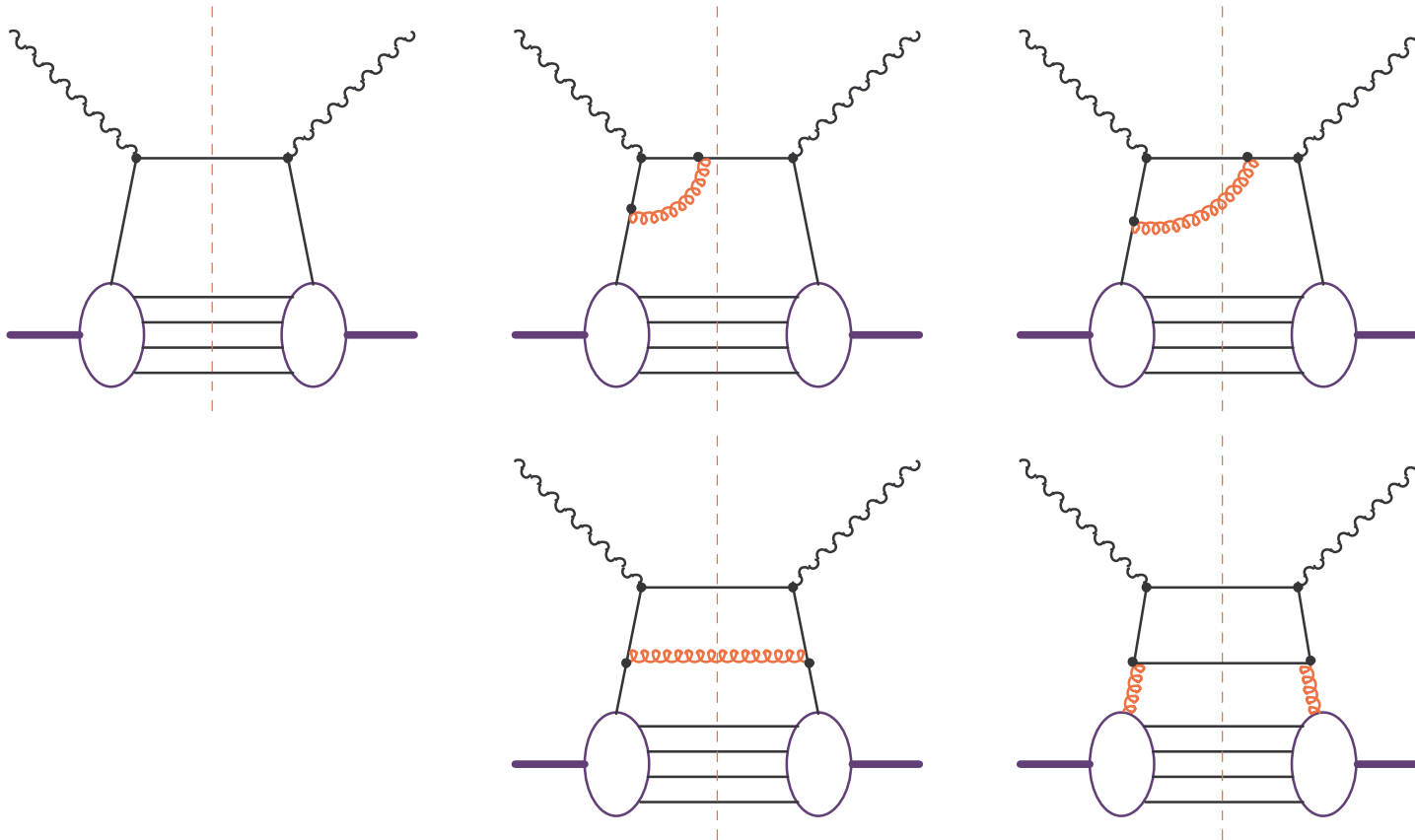
Eksperyment: 0.13.

Uniwersalność rozkładów partonowych.

# Łamanie skalowania Bjorkena

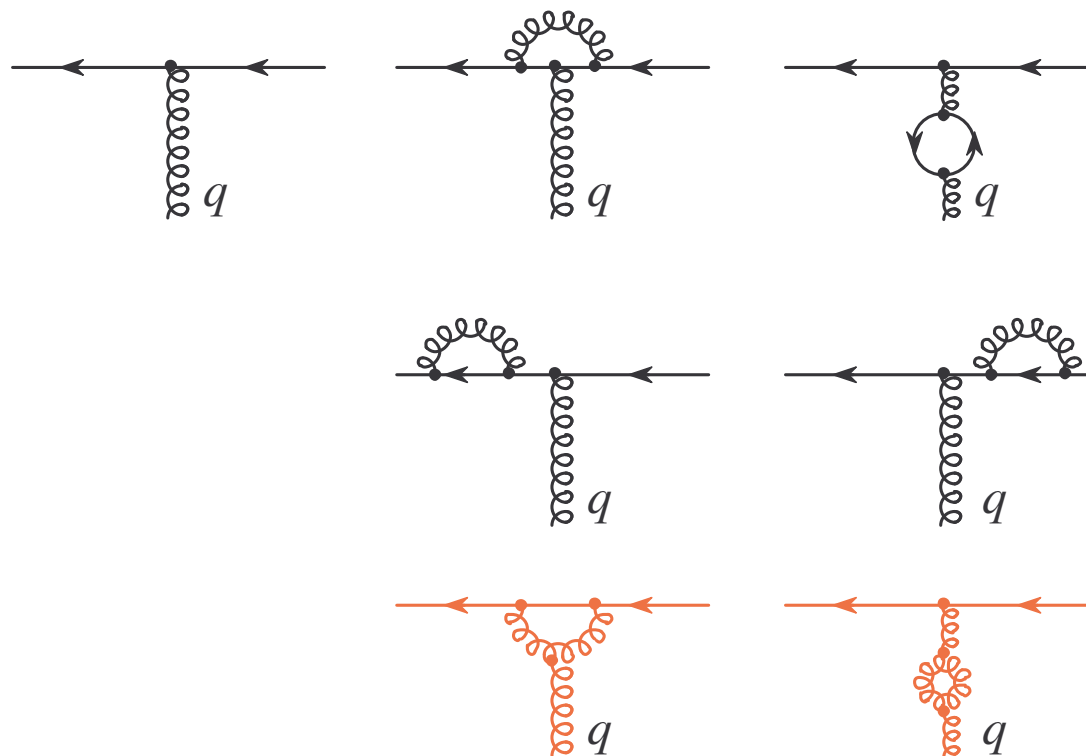


# Poprawki radiacyjne



Dlaczego można stosować rachunek zaburzeń, przecież stała sprzężenia jest duża (oddziaływania są silne)?

## Poprawki kwantowe - rozbieżności



Poprawki do wierzchołka fermion-bozon wektorowy. Kolorem czarnym narysowane są diagramy wspólne dla QED i teorii nieabelowej, kolorem czerwonym dodatkowe diagramy, które istnieją tylko w teorii nieabelowej.

Te diagramy zawierają całki rozbieżne **logarytmicznie**.

# Regularyzacja

- Obcięcie czterowymiarowe ( $\Lambda \rightarrow \infty$ )

$$\underbrace{g^2 \int_{\text{skończone}}^{\infty} \frac{dk}{k + \dots}}_{\text{skończone}} \rightarrow g_{\Lambda}^2 \int^{\Lambda} \frac{dk}{k + \dots} = g_{\Lambda}^2 \ln \Lambda + \text{skończone}$$

- Regularyzacja wymiarowa ( $\varepsilon \rightarrow 0$ )

$$\underbrace{g^2 \int_{\text{skończone}}^{\infty} \frac{dk}{k + \dots}}_{\text{skończone}} \rightarrow g_{\varepsilon}^2 \int^{\infty} k^{-\varepsilon} \frac{dk}{k + \dots} = g_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\varepsilon} k^{-\varepsilon} \Big|_{\text{skończone}}^{\infty} \rightarrow -g_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\varepsilon} \times \text{skończone}$$

# Renormalizacja

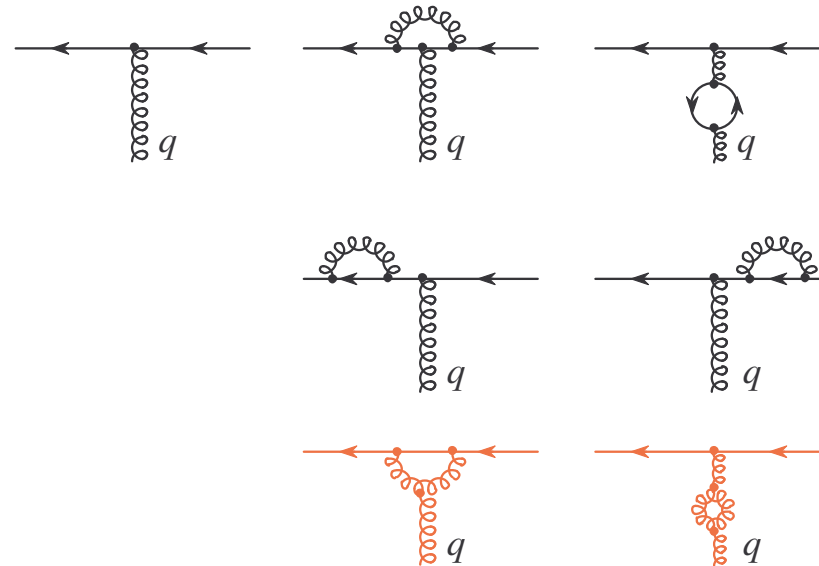
Renormalizacja polega na *wepchnięciu* nieskończoności do

- stałej sprzężenia,
- mas cząstek,
- funkcji falowych.

Jeśli tylko skończona liczba typów rozbieżności się pojawia, która się daje usunąć w ten sposób, to mówimy, że teoria jest *renormalizowalna*.

Nawet jeżeli w teorii nie było stałej wymiarowej (wszystkie masy kładziemy zero, stała sprzężenia jest bezwymiarowa), to renormalizacja wprowadza zależność stałej sprzężenia od pewnej stałej wymiarowej.

## Renormalizacja c.d.



Ponieważ w opisywanym problemie mamy tylko jedną zmienną wymiarową  $Q^2 = -q^2$  ( $m = 0$ ), zregularyzowane wyrażenie może zawierać potencjalną rozbieżność jedynie jako logarytm stosunku  $Q^2/\Lambda^2$ :

$$(\text{suma diagramów z rysunku}) = g_\Lambda \left( 1 - g_\Lambda^2 \left( a \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \dots \right) + \dots \right)$$

Renormalizacja polega na wciągnięciu nieskończoności do  $g_\Lambda$ .



## Renormalizacja c.d.

Rozwińmy potencjalnie nieskończoną stałą  $g_\Lambda$  w funkcji skończonej stałej sprzężenia  $g$ :

$$g_\Lambda = g - ag^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} + \dots$$

$$\begin{aligned} (\text{suma}) &= g_\Lambda \left( 1 - g_\Lambda^2 \left( a \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \dots \right) + \dots \right) \\ &= \left( g - ag^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} + \dots \right) \left( 1 - \left( g - ag^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} + \dots \right)^2 \left( a \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \dots \right) + \dots \right) \\ &= g - ag^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} - g^3 a \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \dots \\ &= g - ag^3 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} + \dots = g(Q^2). \end{aligned}$$

## Renormalizacja c.d.

Lepiej zapisać to dla stałej  $g^2$ :

$$g^2(Q^2) = g^2 - 2ag^4 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} + \dots = \frac{g^2}{1 + 2ag^2 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}}$$

Co to jest  $g^2$ ?

$$g^2 = g^2(Q_0^2)$$

Spróbujemy nieznaną wartość  $g$  w arbitralnym (acz ustalonym) punkcie  $Q_0^2$  zastąpić przez nową stałą wymiarową, którą oznaczymy  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . Najpierw przepisemy

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} = \frac{1}{g^2(Q_0^2)} \left( 1 + 2ag^2(Q_0^2) \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \right) = \frac{1}{g^2(Q_0^2)} + 2a \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}$$

co daje

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} - 2a \ln Q^2 = \frac{1}{g^2(Q_0^2)} - 2a \ln Q_0^2 \stackrel{\text{ozn.}}{=} -2a \ln \Lambda_{\text{QCD}}^2$$

co daje (to jest wzór asymptotyczny dla dużego  $Q^2$ )

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} = 2a \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \rightarrow g^2(Q^2) = \frac{1}{2a \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}}$$

## Biegająca stała sprzężenia

Jeżeli  $a$  jest ujemne to wzór

$$g^2(Q^2) = \frac{g^2}{1 + 2ag^2 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}}$$

ma osobliwość (biegun Landaua w elektrodynamice), jeżeli  $a$  jest dodatnie,  $g^2(Q^2)$  znika dla dużych  $Q^2$  (asymptotyczna swoboda). Używając (standardowa notacja):

$$\alpha(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}}, \quad \beta_0 = \frac{11}{3}C_A - \frac{2}{3}n_f$$

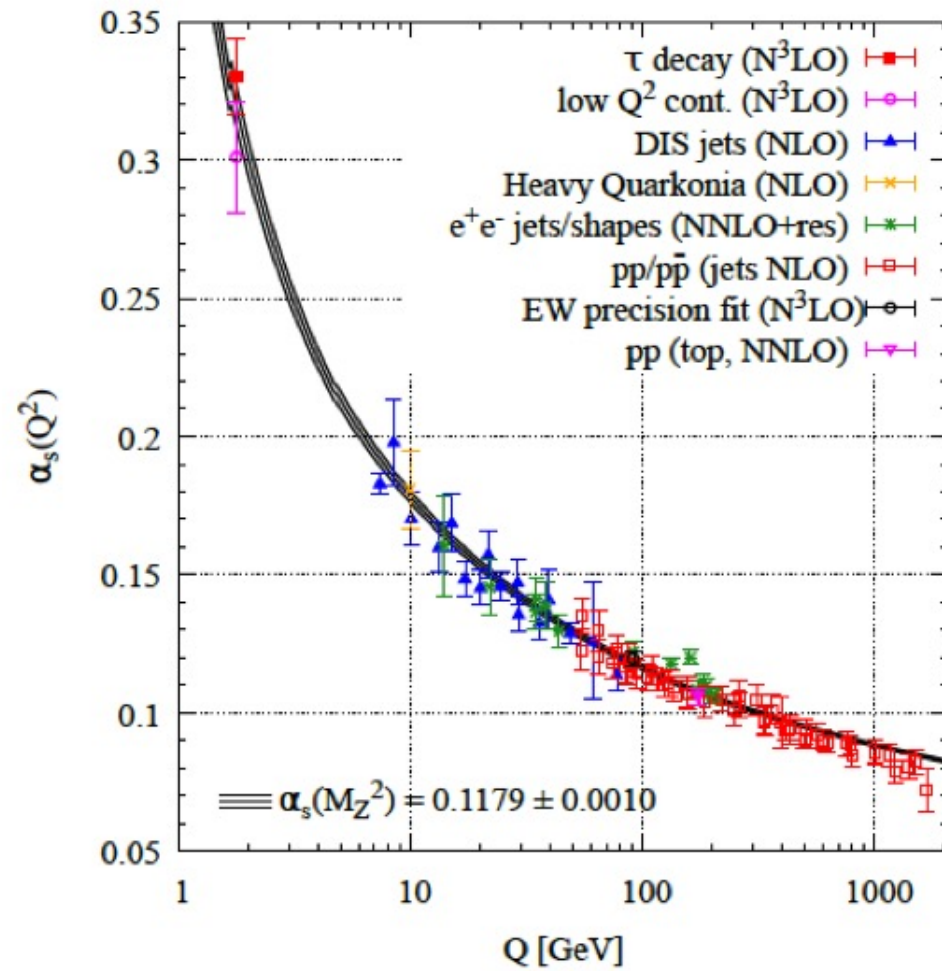
gdzie

$n_f \rightarrow$  liczba kwarków w diagramie pętlowym

$C_A \rightarrow$  operator Casimira dla grupy  $SU(N_c)$

$\Lambda_{\text{QCD}} \approx 300$  MeV, zależy od schematu renormalizacji, rzędu rachunku zaburzeń

Asymptotyczna swoboda tłumaczy, dlaczego z zderzeniu głęboko nieelastycznym można stosować rachunek zaburzeń.



Rysunek 2: Biegająca stała sprzężenia (PDG 2019).

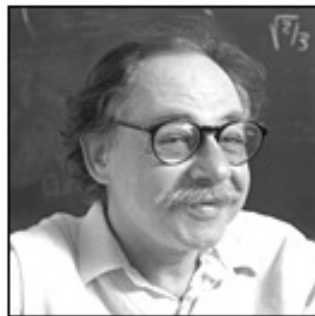
# Asymptotyczna swoboda

1973: Gross & Wilczek w Princeton oraz Politzer (student Coleman, który był na sabattical w Princeton) na Harvardzie wyliczyli funkcję beta dla teorii Yanga-Millsa

**Gross:**

For me the discovery of asymptotic freedom was totally unexpected. Like an atheist who has just received a message from a burning bush, I became an immediate true believer. Field theory wasn't wrong—instead scaling must be explained by an asymptotically free gauge theory

Nobel  
2004



# Asymptotyczna swoboda (prehistoria)

$$b_1 = -\left[\frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}\sum_R n_R T_R\right]$$

- 1965 Mikhail Terentyev & Vlasimir Vanyashin (ITEP)  
błąd:  $11 \times 2 = 22$ , ich wynik = 21

Ваняшин В С, Терентьев М В *ЖЭТФ* **48** 565 (1965) [Vanyashin V S, Terentyev M V *Sov. Phys. JETP* **21** 375 (1965)]

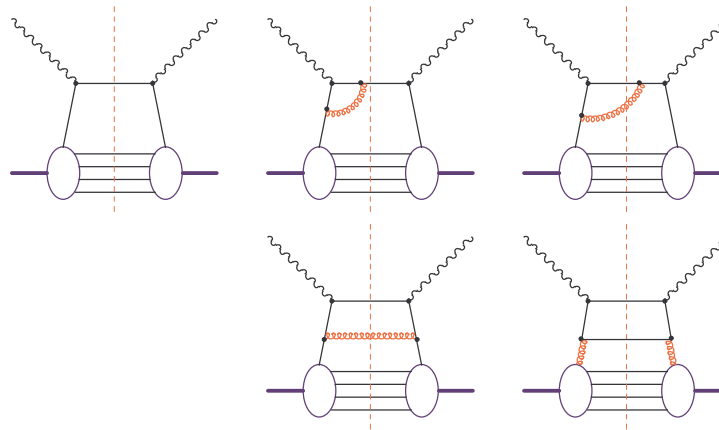
- 1969 Iosif Khripovich (Nowosybirsk)  
(cechowanie Coulomba)

Хриплович И Б *ЯФ* **10** 410 (1969) [Khriplovich I B *Sov. J. Nucl. Phys.* **10** 235 (1970)]

- 1972 Gerald 't Hooft  
konferencja w Marsylii, dyskusja po referacie  
Kurta Symanzika



## Ewolucja rozkładów partonowych



Ostatecznie mamy zespół równań (Dokshitzera–Gribova-Lipatova) Altarelliego-Parisiego, który sumuje emisje kolinearne:

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} q_i(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} [P_{qq} \otimes q_i(Q^2) + P_{qG} \otimes G(Q^2)]$$

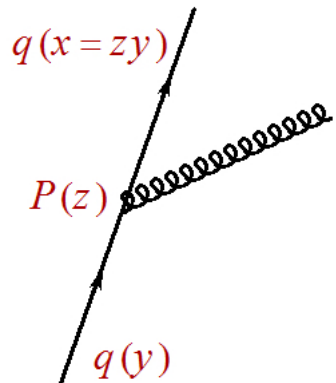
$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} G(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[ P_{Gq} \otimes \sum_i q_i(Q^2) + P_{GG} \otimes G(Q^2) \right]$$

## Równania DGLAP

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} q_i(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} [P_{qq} \otimes q_i(Q^2) + P_{qG} \otimes G(Q^2)]$$

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} G(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[ P_{Gq} \otimes \sum_i q_i(Q^2) + P_{GG} \otimes G(Q^2) \right]$$

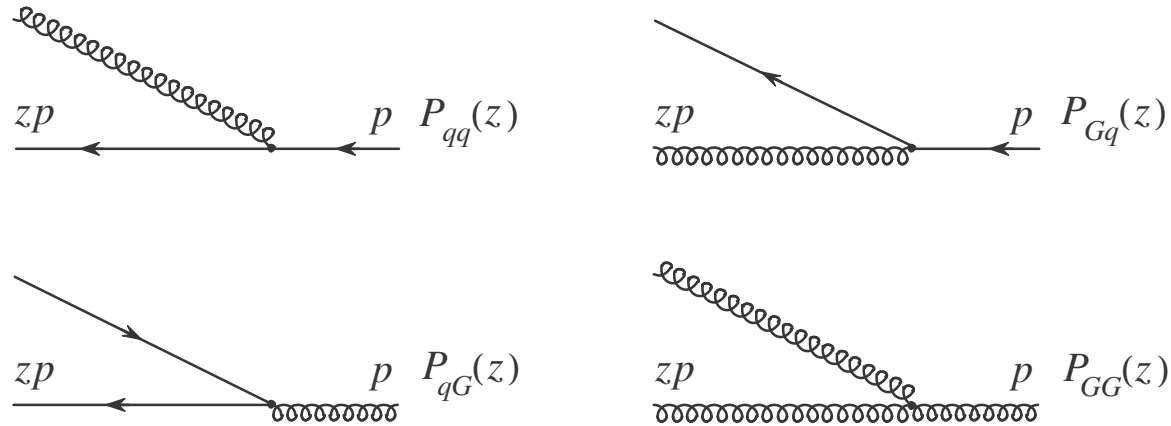
W równaniu użyliśmy konwolucję w zmiennej  $p_{\text{parton}} = xP_{\text{proton}}$ :



$$\begin{aligned} P_{qq} \otimes q &= \int_0^1 dz \int_0^1 dy \delta(x - zy) P_{qq}(z) q(y) \\ &= \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) q(y) = \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) q\left(\frac{x}{z}\right) \end{aligned}$$



# Prawdopodobieństwa Altarelli-Parisi



(czas płynie w lewo) Wyrażenia analityczne:

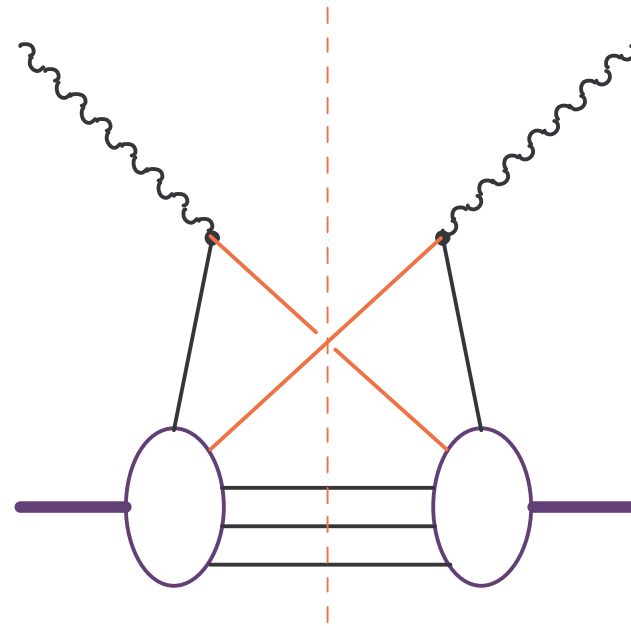
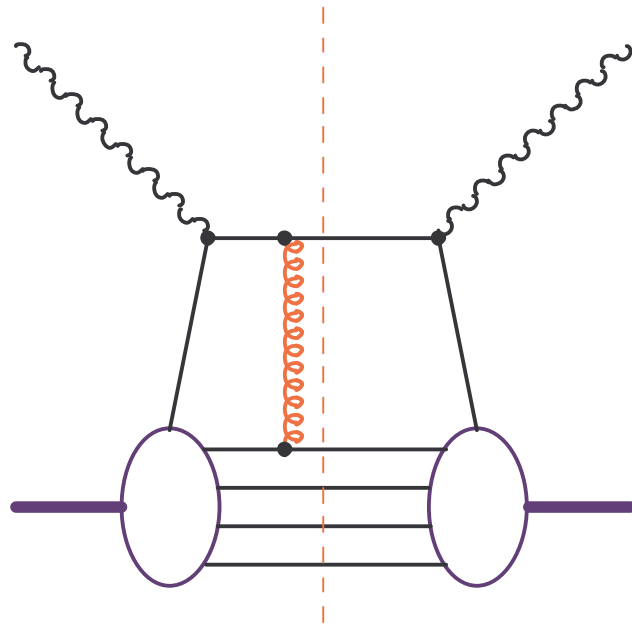
$$P_{qq}(z) = C_F \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right)_+, \quad P_{Gq}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad P_{qG}(z) = \frac{1}{2} \left[ z^2 + (1-z)^2 \right]$$

$$P_{GG}(z) = 2C_A \left[ \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{11}{3}C_A - \frac{2}{3}n_f \right) \delta(1-z)$$

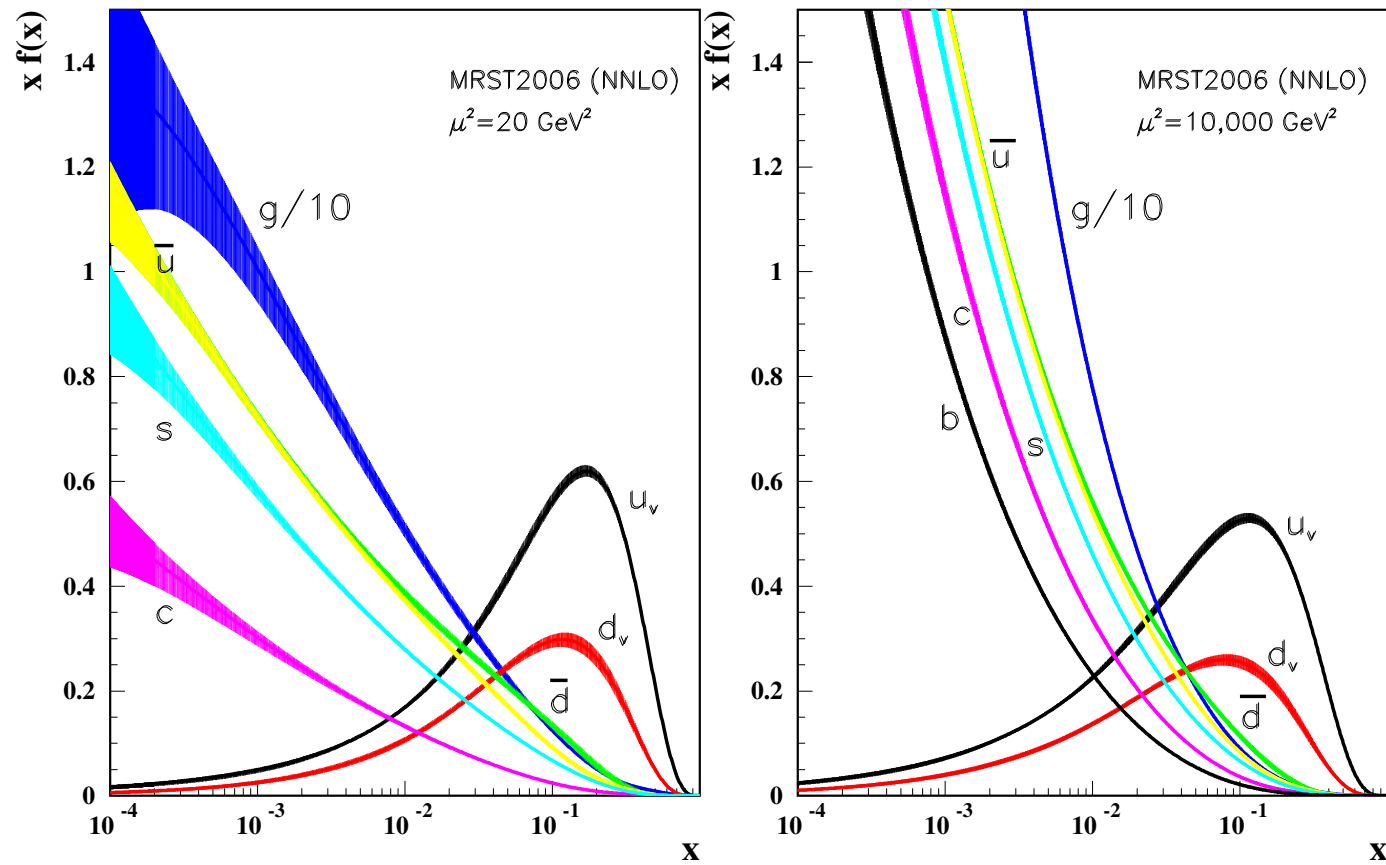
# Interpretacja

- ze wzrostem  $Q^2$  rośnie przestrzeń fazowa, można wyemitować nowe gluony
- rozdzielczość  $d \sim 1/Q$  – widzimy więcej coraz mniejszych obiektów

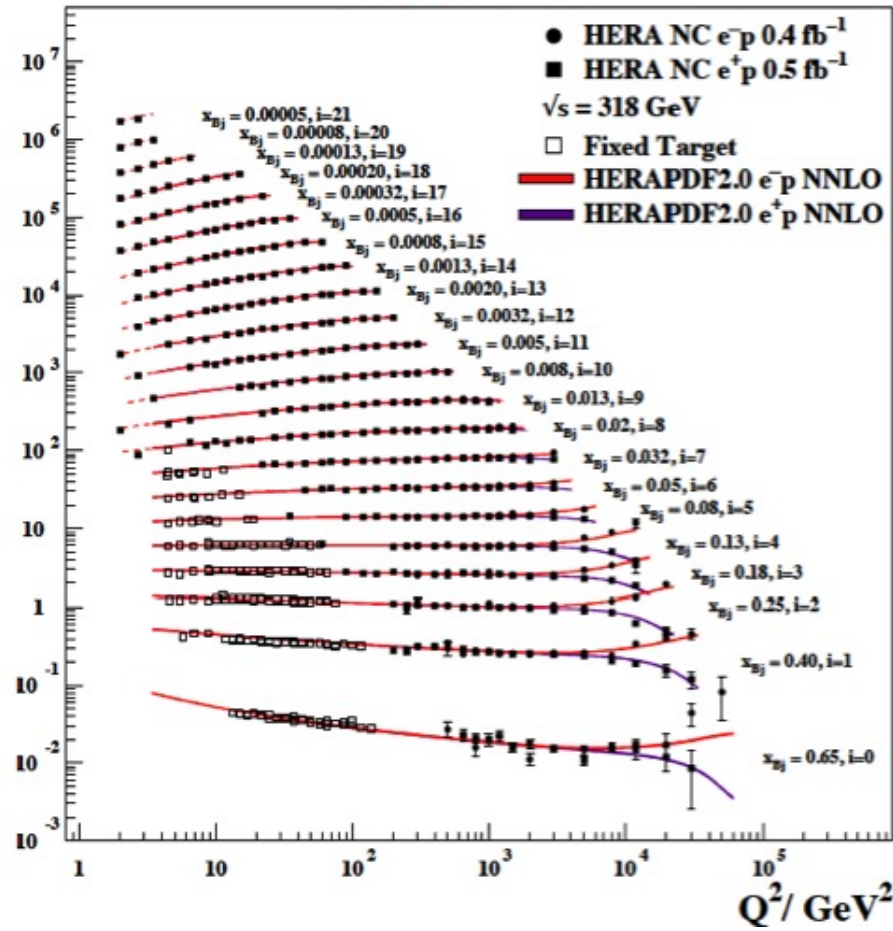
Poprawki których nie bierzemy pod uwagę:



# Rozkłady partonów i ewolucja DGLAP



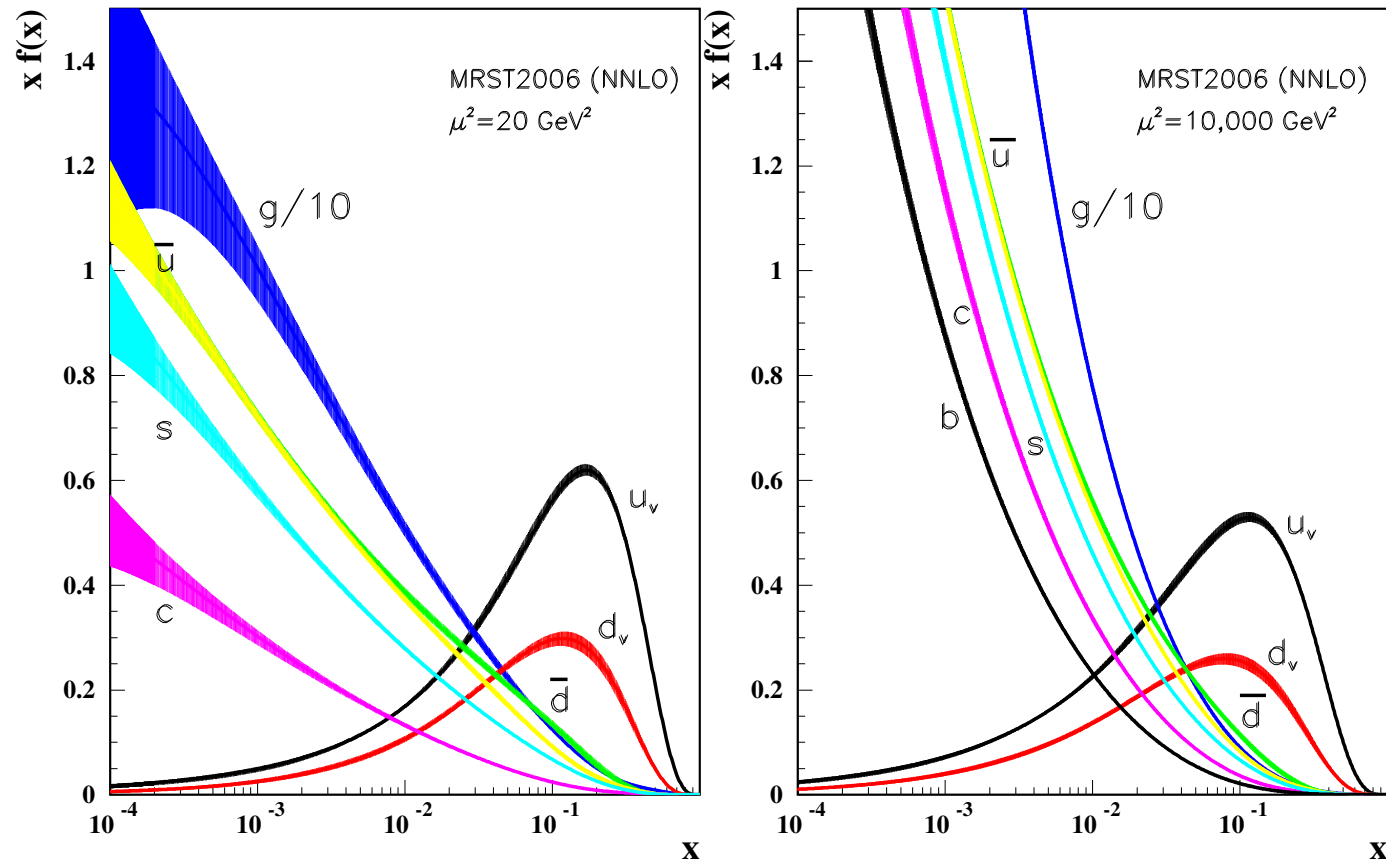
# H1 and ZEUS



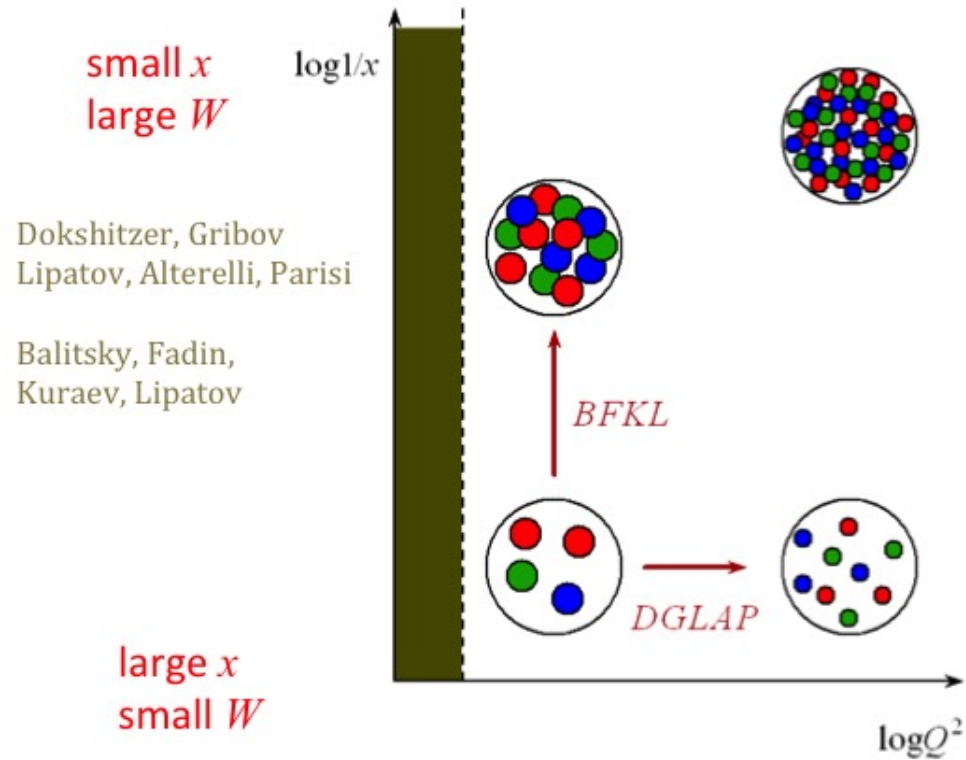
## Dane

- SLAC (Stanford Linear Accelerator Center, Menlo Park) 1961 – długość 3.2 km, przyspieszał elektrony, które uderzały w stacjonarną tarczę,  $E = 50$  GeV
- HERA akcelerator w DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron, Hamburg) 1992–2007 – akcelerator kołowy 6,336 km, zderzenia przeciwbieżnych wiasek  $e^+e^-$ ,  $\sqrt{s} = 318$  GeV, eksperymenty H1, ZEUS, HERMES, HERA-B
- EIC (Electron Ion Collider, Brookaven) planowany na 2028 (?)

# Rozkłady partonów i ewolucja DGLAP



# DGLAP vs. BFKL evolution





# Podsumowanie

- Teorie z symetrią cechowania są renormalizowalne
- Transmutacja wymiarowa:  $\Lambda_{\text{QCD}}$
- Biegająca stała sprzężenia:  $\alpha_s(Q^2)$
- Równania ewolucji  $Q^2 d/dQ^2$  – DGLAP,  $x d/dx$  – BFKL
- Rozkłady partonów wymagają nieperturbacyjnych (doświadczalnych) warunków początkowych
- Saturacja