

# Wstęp do fizyki cząstek, wykład 7

## Rozpraszanie

## Obraz oddziaływania

W obrazie Schrödingera stany ewoluują, operatory nie:

$$H^S = H_0^S + H_1^S$$
$$i\partial_t |\alpha(t)\rangle^S = H^S |\alpha(t)\rangle^S$$

Definiujemy operatory w obrazie oddziaływania (interakcji, Tomonagi):

$$O^I(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}, \quad (H_0^I = H_0^S = H_0)$$
$$|\alpha(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} |\alpha(t)\rangle^S.$$

Równanie Schrödingera:

$$i\partial_t |\alpha(t)\rangle^I = H_1^I |\alpha(t)\rangle^I.$$

# Operator ewolucji

$$|\alpha(t)\rangle^I = U^I(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle^I \quad i\partial_t U^I(t, t_0) = H_1^I(t) U^I(t, t_0).$$

Warunek początkowy

$$U^I(t_0, t_0) = 1.$$

Ponieważ (to jest teoria pola, a nie mechanika kwantowa!)

$$[H_1^I(t), H_1^I(t')] \neq 0$$

rozwiązanie nie jest zwykłą eksponentą. Wprowadźmy uporządkowanie czasowe

$$T(H_1^I(t_1)H_1^I(t_2) \dots H_1^I(t_n)) = H_1^I(t_{i_1})H_1^I(t_{i_2}) \dots H_1^I(t_{i_n})$$

$$\text{gdzie: } t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \dots \geq t_{i_n}$$

Wówczas:

$$U^I(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_1^I(t')} = T e^{-i \int_{t_0}^t d^4x' \mathcal{H}_1^I(x')}$$

gdzie  $\mathcal{H}_1^I(x')$  jest gęstością hamiltonianu oddziaływania w obrazie interakcji.

Od tej pory opuszczamy wskaźnik "I".

## Macierz S

Macierz rozpraszania (scattering matrix). W dalekiej przeszłości przygotowujemy swobodny stan  $|i\rangle$  (od "initial"), który w czasie ewolucji do chwili  $t$  zamienił się w stan  $\psi$ :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\psi(t)\rangle = |i\rangle.$$

Pytamy jaka jest amplituda prawdopodobieństwa, że w dalekiej przyszłości otrzymamy stan  $|f\rangle$  (od "final"):

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle f | \psi(t) \rangle = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \langle f | U(t_2, t_1) | i \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \langle f | S | i \rangle$$

lub

$$S = U(\infty, -\infty).$$

Ponieważ ewolucja zachowuje normę stanu

$$\langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle = \langle \alpha(t_0) | \underbrace{U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0)}_{=1} | \alpha(t_0) \rangle = \langle \alpha(t_0) | \alpha(t_0) \rangle$$

więc  $S$  jest unitarny. Formalnie

$$S = T e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_1(x)}.$$

## Teoria pola w pigułce: jak wyglądają stany $|i\rangle$ oraz $|f\rangle$ ?

Mechanika klasyczna:

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x) \rightarrow \mathcal{H}(p, x)$$

Mechanika kwantowa:

$$E, p, x \rightarrow \hat{E}, \hat{p}, \hat{x} \quad \hat{E}\psi = \hat{\mathcal{H}}\psi$$

Teoria pola:

$$\mathcal{L}(\partial\varphi, \varphi) \rightarrow \mathcal{H}(\pi, \varphi) \quad \pi, \varphi \rightarrow \hat{\pi}, \hat{\varphi}$$

Operatory pola rozkładamy na operatory **kreacji i anihilacji** (jak oscylator!) – normalizacja w pudle

$$\hat{\varphi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left( \frac{\hat{a}_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} + \frac{\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger}{\sqrt{2E_p}} e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} \right)$$

Stany (przestrzeń Focka) spełnione:  $E_p^2 = \vec{p}^2 + m^2$ :

$$|i\rangle = |p_1, p_2\rangle = \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle$$

$$|f\rangle = |p'_1, p'_2 \dots p'_n\rangle = \hat{a}_{\vec{p}'_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\vec{p}'_n}^\dagger |0\rangle.$$

## Prawdopodobieństwo przejścia

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) M_{fi}.$$

Wyodrębniliśmy część bez oddziaływania:  $\delta_{fi}$  i oddziaływanie:  $M_{fi}$ , uwzględniliśmy zachowanie energii i pędu:  $\delta^{(4)}(P_f - P_i)$ . To prowadzi do problemu, gdyż kwadrat  $|S_{fi}|^2$  zawiera źle określone wyrażenie zawierające kwadrat delty Diraka  $\rightarrow$  regularyzacja w pudle (box):

$$\delta^{(3)}(p - q) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{p,q} .$$

$$\delta(E_p - E_q) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^T dt e^{i(E_p - E_q)t} = \frac{T}{2\pi} \delta_{p,q} .$$

Wówczas:

$$P(i \rightarrow f) = |S_{fi}^{\text{box}}|^2 = (2\pi)^8 \left[ \delta_{\text{box}}^{(4)}(P_f - P_i) \right]^2 |M_{fi}^{\text{box}}|^2$$

## Prawdopodobieństwo przejścia – c.d.

$$P(i \longrightarrow f) = VT (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \left[ \frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{N_f + N_i} |M_{fi}|^2.$$

Jedyna pozostałość po pudle: czynniki  $V$  i  $T$ . Aby otrzymać skończone wielkości musimy pomnożyć  $P(i \longrightarrow f)$  przez gęstość stanów końcowych  $dN_f$ . W ten sposób otrzymujemy różniczkowe prawdopodobieństwo przejścia

$$dP(i \longrightarrow f) = P(i \longrightarrow f) dN_f.$$

$$dN_f = \frac{V d^3 q_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{V d^3 q_{N_f}}{(2\pi)^3}.$$

i ostatecznie

$$dP(i \longrightarrow f) = VT (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \left[ \frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{N_i} |M_{fi}|^2 d^3 q_1 \dots d^3 q_{N_f}$$

## Normalizacja $M_{fi}$

Reguły Feynmana nie dla  $M_{fi}$ , ale dla wielkości, z której wyciągnięto czynniki normalizacyjne dla cząstek zewnętrznych. Po pierwsze wyciąga się czynnik

$$1/\sqrt{(2\pi)^3}$$

który pojawia się w normalizacji funkcji falowej. Po drugie, ponieważ cząstki zewnętrzne są na powłoce masy, to tak na prawdę prawdopodobieństwo różniczkowe powinno zawierać czynnik

$$d^4q \delta(q^2 - m^2) = \frac{d^3q}{2E(q)}$$

gdzie  $E(q) = \vec{q}^2 + m^2$ .

$$M_{fi} = \left[ \frac{1}{(2\pi)^3 2E(p_1)} \cdots \frac{1}{(2\pi)^3 2E(p_{N_i})} \frac{1}{(2\pi)^3 2E(q_1)} \cdots \frac{1}{(2\pi)^3 2E(q_{N_f})} \right]^{1/2} \mathcal{M}_{fi}$$



## Tempo rozpadu (decay rate)

Różniczkowe prawdopodobieństwo przejścia:

$$dP(i \longrightarrow f) = VT \frac{1}{V 2E(p_1)} \cdots \frac{1}{V 2E(p_{N_i})} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ \times \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E(q_1)} \cdots \frac{d^3 q_{N_f}}{(2\pi)^3 2E(q_{N_f})} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)$$

**Rozpad:**

jedna cząstka w stanie początkowym  $\rightarrow V$  się upraszcza. Definiujemy

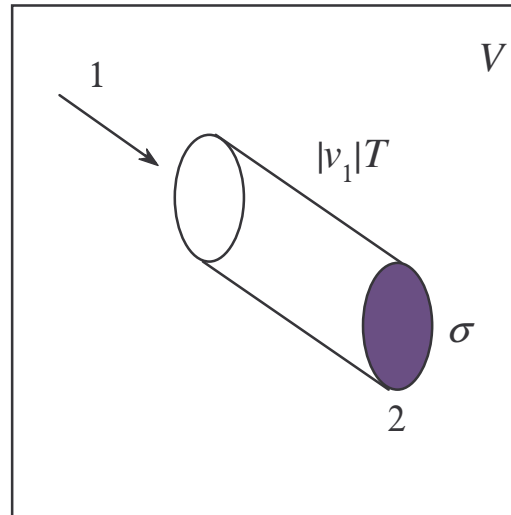
$$d\Gamma(i \longrightarrow f) = \frac{dP(i \longrightarrow f)}{T} \\ = \frac{1}{2E(p_1)} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E(q_1)} \cdots \frac{d^3 q_{N_f}}{(2\pi)^3 2E(q_{N_f})} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)$$

Całkowita szerokość rozpadu: suma po  $f$ , w tym po polaryzacjach, kolorach, etc. Czas życia:  $T \sim 1/\Gamma$ .

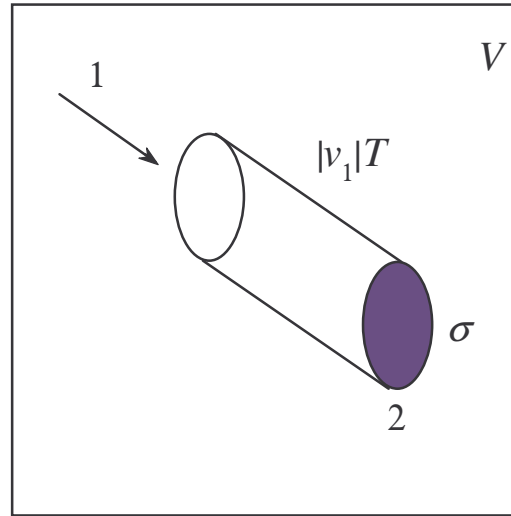
## Przekrój czynny (cross-section)

$$p_1 + p_2 \rightarrow q_1 + q_2 + \dots + q_n,$$

gdzie cząstka 1 uderza w spoczywającą cząstkę 2. Jeśli cząstka 1 „trafi” w dysk o powierzchni  $\sigma$  to prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe objętości walca o podstawie  $\sigma$  i długości  $|\vec{v}_1|T$  podzielonej przez całkowitą objętość pudła  $V$ .



## Przekrój czynny (cross-section) – c.d.



$$P(1 + 2 \rightarrow n) = \frac{|\vec{v}_1| T \sigma_{1+2 \rightarrow n}}{V}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1+2 \rightarrow n} &= \frac{V}{|\vec{v}_1| T} VT \frac{1}{V 2E(p_1)} \frac{1}{V 2E(p_2)} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &\times \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E(q_1)} \cdots \frac{d^3 q_{N_f}}{(2\pi)^3 2E(q_{N_f})} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \end{aligned}$$

## Przekrój czynny (cross-section) – c.d.

Czynniki  $V$  i  $T$  upraszczają się i otrzymujemy

$$\sigma_{1+2 \rightarrow n} = \frac{1}{4E_1 E_2 |\vec{v}_1|} \sum_{\substack{\text{polaryzacje} \\ \text{helicity}}} \int \prod_{i=1}^n \left( \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2E(q_i)} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n q_i),$$

Czynnik  $F = 4E_1 E_2 |\vec{v}_1|$  nazywamy lorentzowsko niezmienniczym strumieniem:

$$F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

# Reguły Feynmana

Diagramy Feynmana konstruujemy w następujący sposób: rysujemy linie odpowiadające cząstkom wchodzącym i wychodzącym, a następnie łączymy je przy pomocy minimalnej liczby wierzchołków i linii wewnętrznych.

$$i\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \bullet \text{---} \bullet$$

$$iS_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad \bullet \text{---} \leftarrow \bullet$$

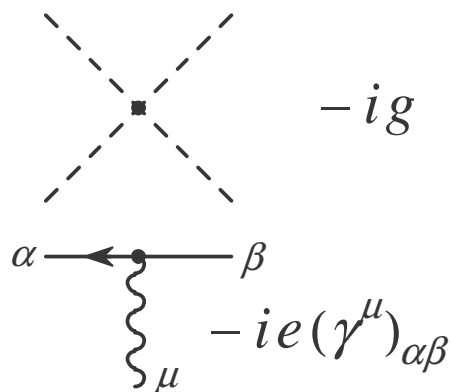
$$iD_F(p)_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \quad \bullet \text{~~~~} \bullet$$

(cechowanie!)

Rysunek 1: Propagatory (linie wewnętrzne) cząstki skalarnej, fermionu i bezmasowej cząstki wektorowej w cechowaniu Feynmana.

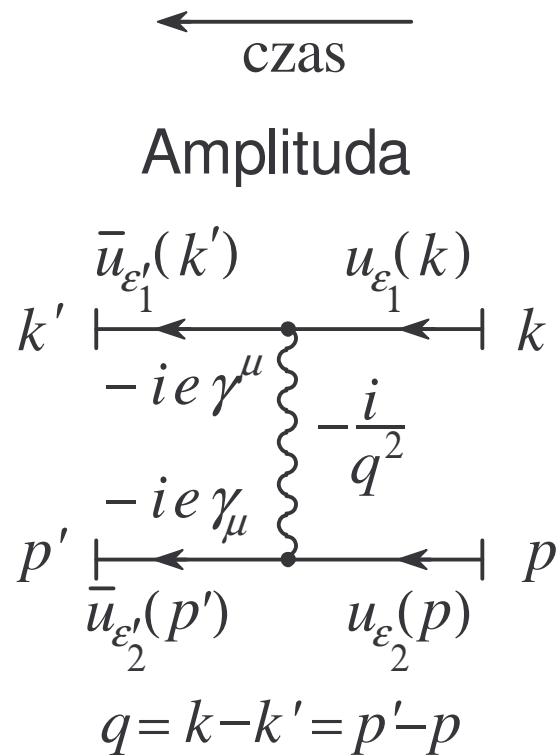
## Reguły Feynmana

Diagramy Feynmana konstruujemy w następujący sposób: rysujemy linie odpowiadające cząstkom wchodzącym i wychodzącym, a następnie łączymy je przy pomocy minimalnej liczby wierzchołków i linii wewnętrznych.



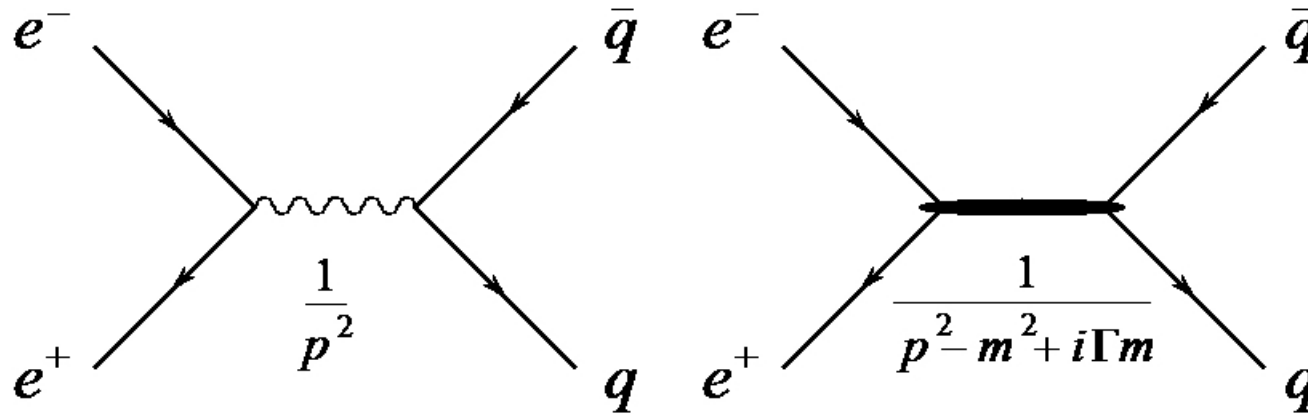
Rysunek 2: Przykładowe wierzchołki w teorii  $\phi^4$  i w elektrodynamice.

# Rozpraszanie dwóch różnych fermionów



Rysunek 3: Rozpraszanie  $2 \rightarrow 2$  w elektrodynamice.

## Formacja rezonansu



Rysunek 4: Formacja rezonansu w kanale  $s$ . Czas płynie w prawo.

Fakt, że cząstka może się rozpadać, a więc że jej funkcja falowa „znika”, uwzględnia się przez dodanie do masy cząstki części urojonej

$$m \rightarrow m - i\frac{\Gamma}{2}. \quad (1)$$

To powoduje, że dla cząstki nierelatywistycznej, której energia  $E \simeq m$  część czasowa funkcji falowej

$$e^{-iEt} \rightarrow e^{-imt} e^{-\Gamma t/2}. \quad (2)$$



## Formacja rezonansu – c.d.

Po podniesieniu amplitudy do kwadratu, przyjmując kinematykę układu centrum masy

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, \vec{p}), \\ p_2 &= (E_1, -\vec{p}) \end{aligned}$$

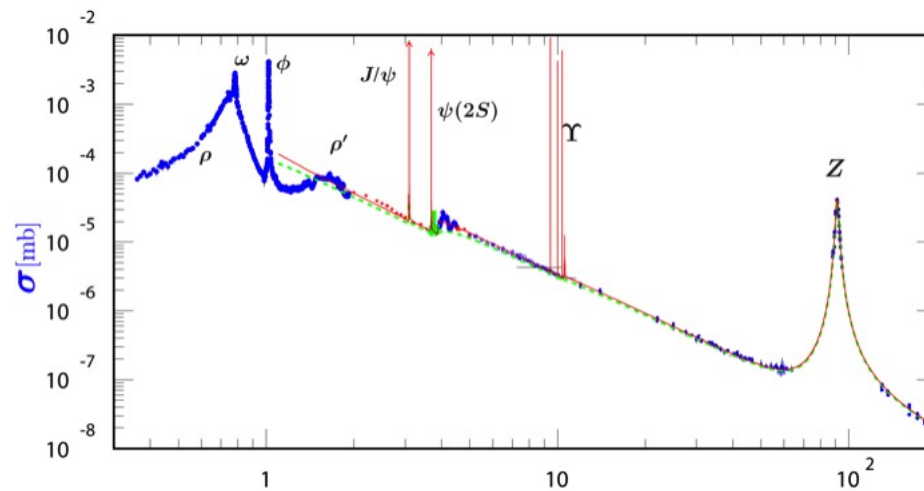
poza licznikiem pojawia się mianownik postaci (Breit-Wigner)

$$\sigma \sim \frac{1}{(E^2 - m^2)^2 + \Gamma^2 m^2} \quad (3)$$

gdzie  $E = E_1 + E_2$ . Zauważmy, że w tym układzie  $E = \sqrt{s}$ .

$$e^+e^- \rightarrow \text{hadrony}$$

Widzimy szereg rezonansów wektorowych począwszy od  $\rho^0$  poprzez rezonanse złożone z ciężkich kwarków  $Q\bar{Q}$  aż po bozon  $Z$ , które pojawiają się jako wzmocnienia (z ang. *peaks*) funkcji  $\sigma(E)$  wokół  $E = m_R$ , gdzie  $m_R$  to masa rezonansu. Szerokość tych wzmocnień jest proporcjonalna do  $\Gamma_R \sim 1/t_R$ .



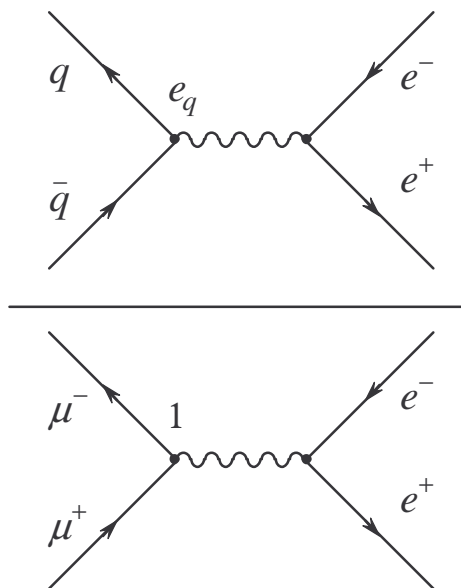
Rysunek 5: Formacja rezonansów w kanale  $s$  – przekrój czynny.

## $e^+e^- \rightarrow$ hadrony. Stosunek $R$

Zamiast przekroju czynnego, który silnie maleje z energią, wygodnie jest wykreślić stosunek

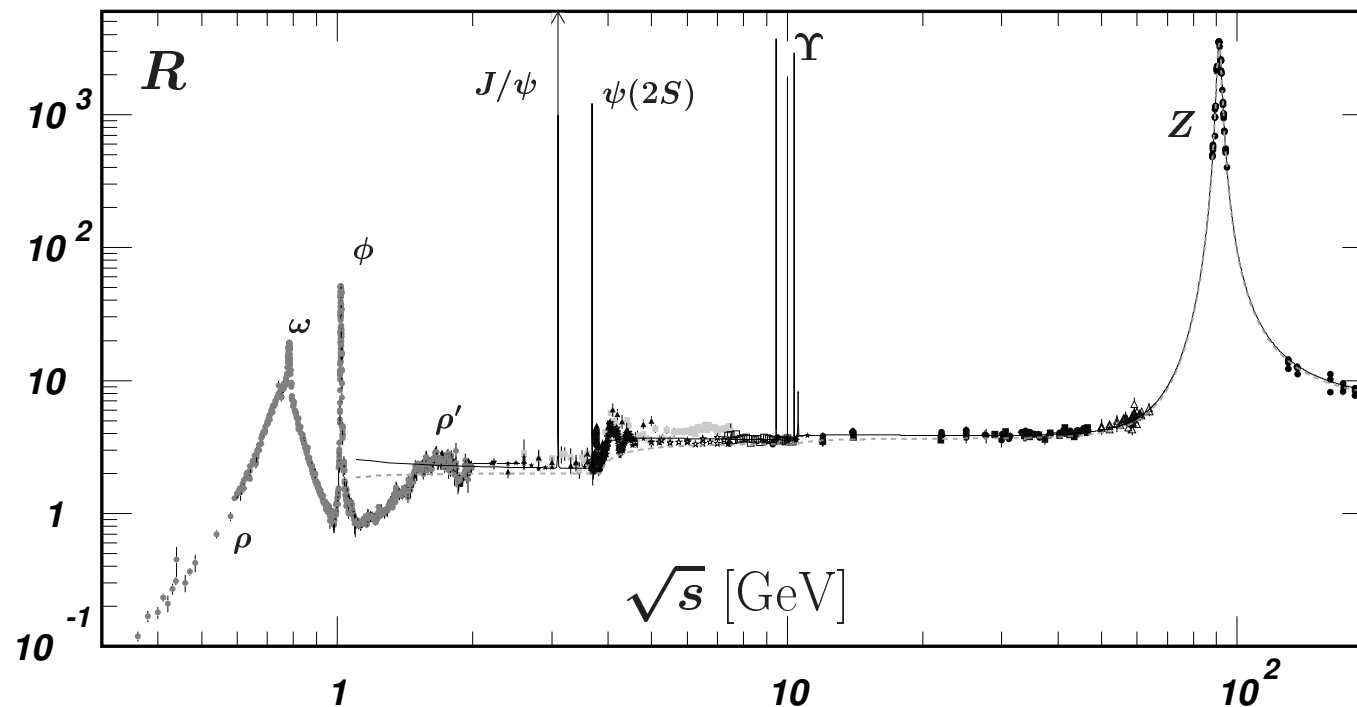
$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{hadrony}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}}, \quad (4)$$

w którym nieinteresujące nas czynniki normalizacyjne się kasują.



## $e^+e^- \rightarrow \text{hadrony}$ . Stosunek $R$ – c.d.

Poza obszarem wzmocnień rezonansowych  $R$  jest prawie niezależny od energii, za wyjątkiem progowych skoków kiedy całkowita energia zderzenia przekracza wartość  $2m_q$ .



Rysunek 6: Formacja rezonansów w kanale  $s$  – stosunek  $R$ .

Ponieważ w stanie końcowym obserwujemy tylko hadrony, stosunek  $R$  poza obszarem rezonansowym jest po prostu proporcjonalny do kwadratów ułamków określających ładunki kwarków, które mogą się wyprodukować przy danej energii:

$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3},$$

$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 + e_c^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9},$$

$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 + e_c^2 + e_b^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}$$

Patrząc na dane widzimy, że poniżej cząstki  $J/\psi$ , a więc poniżej progu na produkcję kwarków powabnych (ang. *charm threshold*) stosunek ten jest równy mniej więcej 2, gdy tymczasem z powyższych równań wynika, że powinien on wynosić 2/3. Skąd bierze się ta rozbieżność?

Ze względu na to, że kwarki oddziałują silnie i należą do trójwymiarowej reprezentacji lokalnej grupy cechowania  $SU(3)$  (kolor), kwadrat amplitudy pokazanej na rysunku zawiera sumowanie po wszystkich stanach tej reprezentacji, co daje dodatkowy czynnik 3. A zatem stosunek  $R$  upewnia nas w tym, że oddziaływania silne oparte są grupie cechowania  $SU(3)$ .