

Fermiony lewoskrętne i prawoskrętne

Równanie Diraka

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m)\psi = 0.$$

Chiralna reprezentacji macierzy $\vec{\alpha}$ i β , spinory Weyla:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wówczas równanie Diraka jest równoważne dwóm równaniom:

$$\left(i\partial_t - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right) \psi_L - m\psi_R = 0, \quad \left(i\partial_t + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right) \psi_R - m\psi_L = 0.$$

Widzimy, że dla fermionów bezmasowych, $m = 0$, są to dwa niezależne równania na $\psi_{L,R}$. Różne prawa transformacji dla spinorów lewoskrętnych ψ_L i prawoskrętnych ψ_R .

Operatory rzutowe:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$$

gdzie macierz γ_5 w reprezentacji chiralnej ma postać

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gęstość Lagrange'a dla fermionów

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger (i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m)\psi = \psi^\dagger \beta (i\partial - m)\psi = \bar{\psi} (i\partial - m)\psi$$

Przeprowadzając wariację względem ψ^\dagger lub alternatywnie względem $\bar{\psi}$ dostajemy równanie Diraka. Alternatywnie:

$$\mathcal{L} = \psi_L^\dagger \left(i\partial_t - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \psi_L + \psi_R^\dagger \left(i\partial_t + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L).$$

Jeżeli $m = 0$ wówczas ψ_L i ψ_R są niezależne. Wprowadzając „czterowektory”

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}), \quad \partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla}), \quad \partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla}).$$

mamy gęstość Lagrange'a w postaci:

$$\mathcal{L} = i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L).$$

Dla cząstek oddziaływujących musimy zastąpić zwykłą pochodną przez pochodną kowariantną:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu$$

Transformacja fermionów względem SU(2)

Definiujemy dublet leptonowy:

$$L = \begin{bmatrix} L_A \\ L_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix} \text{ neutrino jest g\u00f3rn\u0105 sk\u0142adow\u0105} .$$

kt\u00f3ry wzgl\u0119dem grupy SU(2) transformuje si\u0119 tak jak dublet p\u00f3l Higgsa Φ :

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = U\Phi, \\ L &\rightarrow L' = UL, \\ U &= e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}} . \end{aligned}$$

Prawoskr\u0119tne leptony **nie** transformuj\u0105 si\u0119 wzgl\u0119dem grupy SU(2):

$$e_R \rightarrow e'_R = e_R, \quad \nu_{eR} \rightarrow \nu'_{eR} = \nu_{eR}.$$

Aby znale\u017c\u0107 transformacj\u0119 U(1) zbadamy pochodn\u0105 kowariantn\u0105.

Pochodna kowariantna

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu + i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} \mathbf{W}_\mu \right) \Phi,$$

$$\tilde{D}_\mu L = \left(\partial_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} \mathbf{W}_\mu \right) L.$$

Stała g_2 jest taka sama jak dla Φ , ale g' trzeba tak dobrać, żeby foton nie sprzęgał się z neutrino:

$$\tilde{D}_\mu L = \begin{bmatrix} \partial_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^3 & i \frac{g_2}{2} \sqrt{2} W_\mu^+ \\ i \frac{g_2}{2} \sqrt{2} W_\mu^- & \partial_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu - i \frac{g_2}{2} W_\mu^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}.$$

Pamiętajmy:

$$B = A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W, \quad W^3 = Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W.$$

Żądamy:

$$g' B_\mu + g_2 W_\mu^3 \leftarrow \text{nie zawiera } A.$$

Transformacja U(1) dla pól lewoskrętnych

$$\begin{aligned} g' B_\mu + g_2 W_\mu^3 &= g' (A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W) + g_2 (Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W) \\ &= A(g' \cos \theta_W + g_2 \sin \theta_W) + Z(-g' \sin \theta_W + g_2 \cos \theta_W) \end{aligned}$$

nie powinien zawierać pola A :

$$g' \cos \theta_W + g_2 \sin \theta_W = 0.$$

Z kolei

$$\begin{aligned} g' B_\mu - g_2 W_\mu^3 &= g' (A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W) - g_2 (Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W) \\ &= A(g' \cos \theta_W - g_2 \sin \theta_W) - Z(g' \sin \theta_W + g_2 \cos \theta_W) \end{aligned}$$

Pamiętając o czynniku normalizacyjnym $1/2$ przy stałych sprzężenia i poprzednim równaniu mamy

$$g' \cos \theta_W - g_2 \sin \theta_W = -2g_2 \sin \theta_W = -2e$$

Transformacja U(1) dla pól lewoskrętnych

Korzystając z równości

$$g_1 \cos \theta_W = g_2 \sin \theta_W = e.$$

otrzymujemy

$$g' = -g_1.$$

Oznacza to, że transformacja U(1) działa na leptony z fazą *przeciwną* do transformacji dla pola Φ . Stąd pełna transformacja $U(1) \times SU(2)$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x) \Phi, \\ L &\rightarrow L' = e^{+i\theta(x)} U(x) L.\end{aligned}$$

Transformacja U(1) dla pól prawoskrętnych

$$\begin{aligned}\check{D}_\mu e_R &= \left(\partial_\mu + i \frac{g''}{2} B_\mu \right) e_R \\ &= \left(\partial_\mu + i \frac{g''}{2} (A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W) \right) e_R,\end{aligned}$$

gdzie g'' jest nową stałą sprzężenia. Elektron ma ładunek $-e$, więc

$$\frac{g''}{2} \cos \theta_W = -e = -g_1 \cos \theta_W \quad \rightarrow \quad g'' = -2g_1$$

co oznacza, że prawo transformacji dla pól prawych przyjmuje postać

$$\begin{aligned}e_R &\rightarrow e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R, \\ \nu_{eR} &\rightarrow \nu'_{eR} = \nu_{eR}.\end{aligned}$$

Masy leptonów

Prawa transformacji:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x) \Phi, \quad L \rightarrow L' = e^{i\theta(x)} U(x) L, \quad e_R \rightarrow e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R.$$

Niezmienniki:

$$L^\dagger \Phi \rightarrow \text{niezmiennik SU(2), ale dostaje fazę U(1): } e^{-i2\theta(x)}$$

$$(L^\dagger \Phi) e_R \rightarrow \text{niezmiennik SU(2) } \times \text{ U(1)}$$

Zatem niezmienniczy lagrangian (λ_e stała Yukawy – *całkowicie dowolna*):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^e &= -\lambda_e \left\{ (L^\dagger \Phi) e_R + e_R^\dagger (\Phi^\dagger L) \right\} \\ &= -\lambda_e \left\{ \Phi_A \left(\nu_{eL}^\dagger e_R \right) + \Phi_B \left(e_L^\dagger e_R \right) + \Phi_A^\dagger \left(e_R^\dagger \nu_{eL} \right) + \Phi_B^\dagger \left(e_R^\dagger e_L \right) \right\} \end{aligned}$$

Próżnia:

$$\Phi_A = 0, \quad \Phi_B = \phi_0$$

UWAGA: nie ma członów $\nu_{eR}^\dagger \nu_{eL} \rightarrow$ neutrina bezmasowe (górną składową L)

Masy leptonów c.d.

Masa elektronu wynosi zatem

$$m_e = \lambda_e \phi_0, \quad \text{gdzie} \quad \phi_0 = 180 \text{ GeV}$$

co wymaga bardzo małej stałej Yukawy: $\lambda_e \sim 10^{-6}$. Powtarzając analogiczną konstrukcję dla μ i dla τ otrzymujemy

$$\lambda_e \sim 10^{-6}, \quad \lambda_\mu \sim 10^{-3}, \quad \lambda_\tau \sim 10^{-2}. \quad (1)$$

Arbitralność sprzężeń Yukawy i ich duży rozrzut jest do dziś nierozwiązanym problemem w modelu standardowym.

Oddziaływania słabe – kwarki

Zakładamy, że lewe kwarki tworzą dublety ze względu na grupę SU(2)

$$L = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} - \text{dublet SU(2)}, \quad L \rightarrow L' = U L,$$

a kwarki prawoskrętne są singletami:

$$u_R, d_R - \text{singlety SU(2)}.$$

Pamiętajmy, że ładunki kwarków są ułamkowe:

$$q_{\text{up}} = +\frac{2}{3}e \text{ dla } u, c, t \quad q_{\text{down}} = -\frac{1}{3}e \text{ dla } d, s, b.$$

Pochodna kowariantna przyjmuje postać:

$$D_\mu L = \begin{bmatrix} \partial_\mu + i\frac{g_1}{6}B_\mu + i\frac{g_2}{2}W_\mu^3 & i\frac{g_2}{2}\sqrt{2}W_\mu^+ \\ i\frac{g_2}{2}\sqrt{2}W_\mu^- & \partial_\mu + i\frac{g_1}{6}B_\mu - i\frac{g_2}{2}W_\mu^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix}.$$

Podobnie dla pól prawoskrętnych.

Kwarki – prawa transformacji

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x) \Phi,$$

$$L \rightarrow L' = e^{-i\theta(x)/3} U(x) L,$$

$$u_R \rightarrow u'_R = e^{-i4\theta(x)/3} u_R,$$

$$d_R \rightarrow d'_R = e^{+i2\theta(x)/3} d_R.$$

Te prawa transformacji stosują się do pozostałych dwóch generacji

$$L_2 = \begin{bmatrix} c_L \\ s_L \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} t_L \\ b_L \end{bmatrix} \quad - \quad \text{duplety SU(2),}$$

$$c_R, s_R, t_R, b_R \quad - \quad \text{singlety SU(2).}$$

Masy kwarków d

Kopia lagragianu dla naładowanych leptonów:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{d\text{Higgs}} &= - \sum_{k=1}^3 \left[\lambda_k^d \left(L_k^\dagger \Phi \right) d_{kR} + \lambda_k^{d*} d_{kR}^\dagger (\Phi^\dagger L_j) \right] \\ &\rightarrow -\phi_0 \sum_{k=1}^3 \left[\lambda_k^d d_{kL}^\dagger d_{kR} + \lambda_k^{d*} d_{kR}^\dagger d_{kL} \right] \quad \text{człon masowy} \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy trzy arbitralne stałe Yukawy λ_k^d

Musimy wygenerować masy kwarkom $u_k = u, c, t$. Oczywiście problem z masami dla kwarków „górnych” bierze się stąd, że stan próżni ma postać

$$\Phi_{\text{vac}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{bmatrix}.$$

Żeby nadać masy kwarkom u_k musimy w jakiś sposób odwrócić kolejność kwarków w dublecie

$$L = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} \rightarrow L_1 = \begin{bmatrix} d_L \\ u_L \end{bmatrix}$$

Masy kwarków u

Użyjemy tensora Levi-Civity, który w notacji macierzowej ma postać

$$\varepsilon_{jk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^2 = -\mathbf{1}, \quad \varepsilon\varepsilon^T = 1.$$

Utwórzmy „odwrócony” dublet (uwaga na znak minus!):

$$L_\varepsilon = \varepsilon L = \begin{bmatrix} d_L \\ -u_L \end{bmatrix}.$$

Jak transformuje się L_ε ? Tożsamość:

$$U^T \varepsilon U = \varepsilon \det U = \varepsilon.$$

Niezmiennik:

$$u_R^\dagger (\Phi^T \varepsilon L) \rightarrow u_R^\dagger e^{i4\theta(x)/3} \left(e^{-i\theta(x)} \Phi U^T \varepsilon U L e^{-i\theta(x)/3} \right) = u_R^\dagger (\Phi^T \varepsilon L), \quad (2)$$

Masy kwarków u – c.d.

Niezmienniczy człon masowy dla kwarków u_k przyjmuje postać (uwaga na znak minus!)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{u \text{ Higgs}} &= - \sum \left[\lambda_k^u \left(L_k^\dagger \varepsilon \Phi^* \right) u_{kR} - \lambda_k^{u*} u_{kR}^\dagger (\Phi^T \varepsilon L_k) \right] \\ &\rightarrow -\phi_0 \sum \left[\lambda_k^u u_{kL}^\dagger u_{kR} + \lambda_k^{u*} u_{kR}^\dagger u_{kL} \right] \quad \text{człon masowy}\end{aligned}$$

Nadanie masy kwarkom u_k wymagało wprowadzenia kolejnych trzech arbitralnych stałych Yukawy.

Mieszanie kwarków

$$\lambda_k \rightarrow \Lambda_{jk}.$$

Wówczas człony masowe przyjmują postać

$$\mathcal{L}_{q\text{mass}} = -\phi_0 \sum \left[\Lambda_{jk}^d d_{jL}^\dagger d_{kR} + \Lambda_{jk}^{d*} d_{kR}^\dagger d_{jL} \right] - \phi_0 \sum \left[\Lambda_{jk}^u u_{jL}^\dagger u_{kR} + \Lambda_{jk}^{u*} u_{kR}^\dagger u_{jL} \right].$$

Macierze Λ^d oraz Λ^u można zdiagonalizować:

$$\phi_0 \Lambda_{jk}^d = \mathcal{D}_L^\dagger M^d \mathcal{D}_R, \quad \phi_0 \Lambda_{jk}^u = \mathcal{U}_L^\dagger M^u \mathcal{U}_R, \quad (3)$$

gdzie

$$M^d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{bmatrix}, \quad M^u = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Definiujemy nowe pola

$$\begin{aligned} d'_{jL} &= (\mathcal{D}_L)_{jk} d_{kL}, & d'_{jR} &= (\mathcal{D}_R)_{jk} d_{kR}, \\ u'_{jL} &= (\mathcal{U}_L)_{jk} u_{kL}, & u'_{jR} &= (\mathcal{U}_R)_{jk} u_{kR}, \end{aligned} \quad (5)$$

Mieszanie kwarków – c.d.

Dla nowych pól u'_j i d'_j człon masowy jest diagonalny:

$$\mathcal{L}_{q \text{ mass}} = - \sum_{j=d,s,b} \left[m_j^d \left(d'_{jL}{}^\dagger d'_{jR} + d'_{jR}{}^\dagger d'_{jL} \right) \right] - \sum_{j=u,c,t} \left[m_j^u \left(u'_{jL}{}^\dagger u'_{jR} + u'_{jR}{}^\dagger u'_{jL} \right) \right]. \quad (6)$$

Oddziaływania z bozonami W

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qW} &= - \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum_k \left[\left(u'_{kL}{}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d'_{kL} \right) W_\mu^+ + \left(d'_{kL}{}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u'_{kL} \right) W_\mu^- \right] \\ &= - \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum_{i,j,k} \underbrace{(\mathcal{U}_L)_{ik} (\mathcal{D}_L^\dagger)_{kj}}_{V_{ij}} \left(u'_{iL}{}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d'_{jL} \right) W_\mu^+ + \underbrace{(\mathcal{D}_L)_{jk} (\mathcal{U}_L^\dagger)_{ki}}_{V_{ij}^\dagger} \left(d'_{jL}{}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u'_{iL} \right) W_\mu^- \end{aligned}$$

Macierz mieszania Cabibbo-Kobayashi-Maskawa:

$$V_{ij} = (\mathcal{U}_L)_{ik} (\mathcal{D}_L^\dagger)_{kj}.$$

Macierz CKM

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \begin{bmatrix} u_L^\dagger & c_L^\dagger & t_L^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \tilde{\sigma}^\mu \begin{bmatrix} d_L' \\ s_L' \\ b_L' \end{bmatrix} W_\mu^+ + \text{h.c.}$$

Macierz CKM zależy od trzech kątów i jednej fazy (łamane CP):

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$s_{ij} = \sin \theta_{ij}, \quad c_{ij} = \cos \theta_{ij}$$

Macierz CKM – wartości numeryczne

$$|V_{\text{CKM}}| = \begin{bmatrix} \mathbf{0.97421} & \mathbf{0.2243} & \mathbf{0.00394} \\ \mathbf{0.218} & \mathbf{0.997} & \mathbf{0.0422} \\ \mathbf{0.0081} & \mathbf{0.0394} & \mathbf{1.019} \end{bmatrix}$$

Teraz, kiedy już wiemy, że neutrina mają masę, analogiczna macierz Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) opisuje mieszanie neutrin, z tym że wszystkie kąty mieszania są duże.

Unitarity triangle

$$\begin{aligned} V_{\text{CKM}}^\dagger V_{\text{CKM}} &= \\ &= \begin{bmatrix} V_{ud}^* & V_{cd}^* & V_{td}^* \\ V_{us}^* & V_{cs}^* & V_{ts}^* \\ V_{ub}^* & V_{cb}^* & V_{tb}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$V_{ud}^* V_{ub} + V_{cd}^* V_{cb} + V_{td}^* V_{tb} = \mathbf{0}$$

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = \mathbf{0}$$

Mamy

$$1 + \frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} + \frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} = \mathbf{0}$$

Suma trzech liczb zespolonych jest równa zero – trójkąt unitarny.

Unitarity triangle – c.d.

$$1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = \mathbf{0}$$

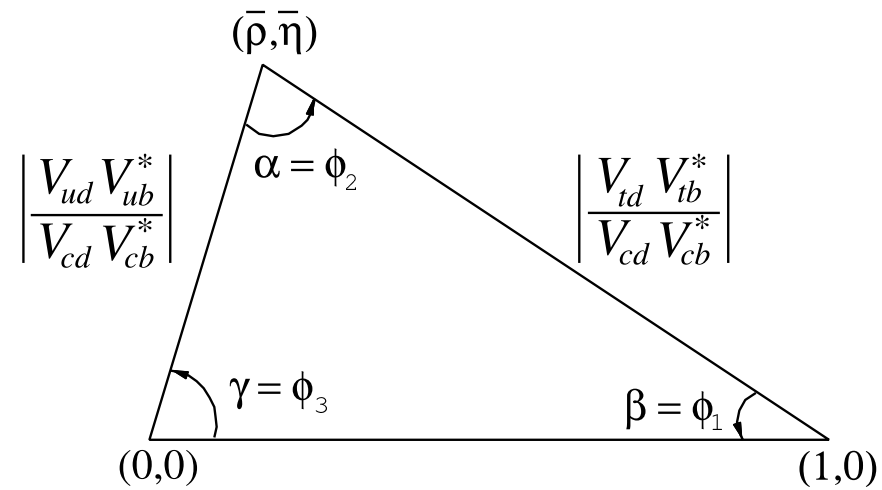


Figure 11.1: Sketch of the unitarity triangle.

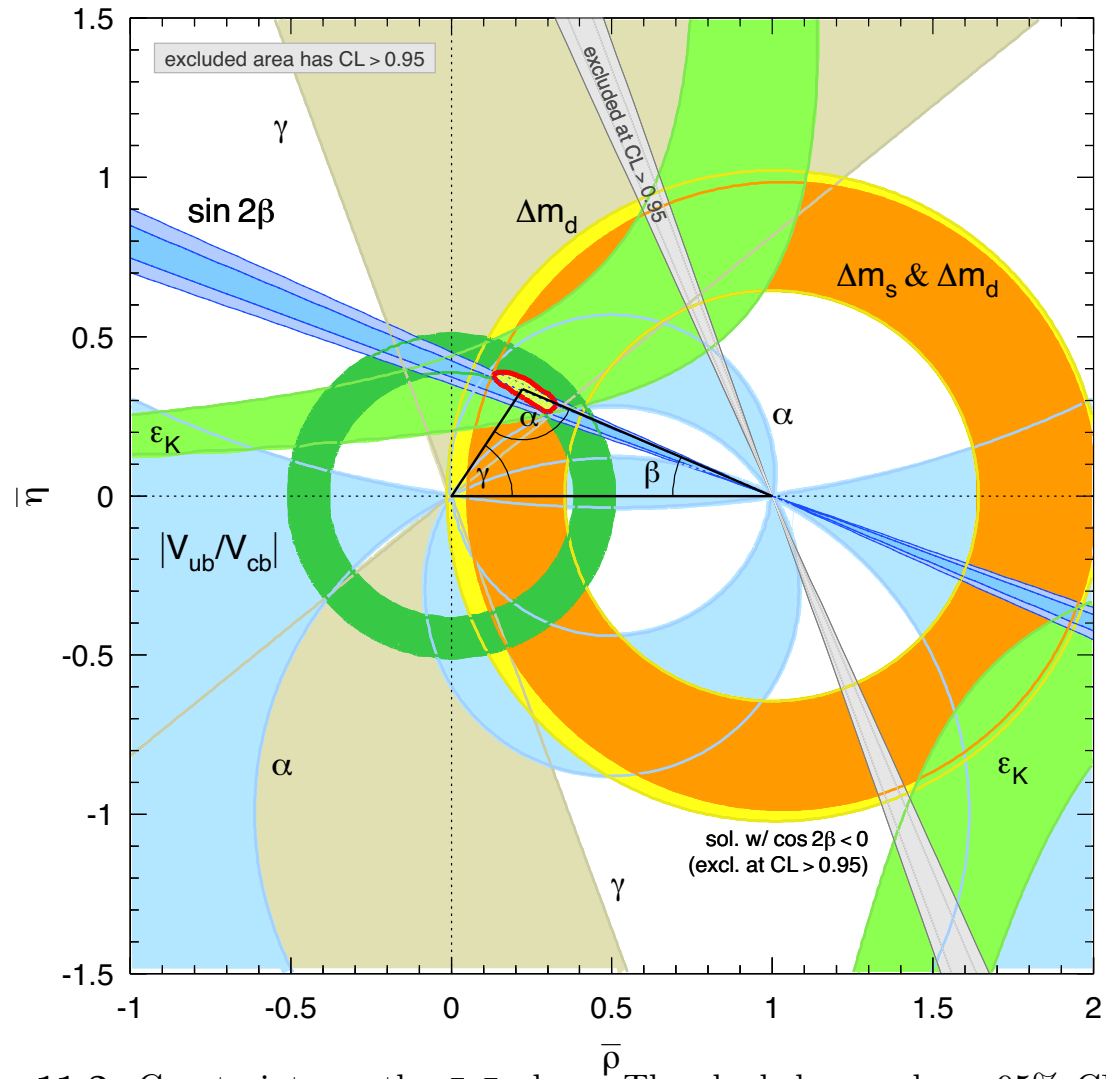


Figure 11.2: Constraints on the $\bar{\rho}, \bar{\eta}$ plane. The shaded areas have 95% CL. See full-color version on color pages at end of book.