

# Wstęp do fizyki cząstek

wykład 3

15.3.2021

# Stany bazowe w SU(2)

W przypadku grupy SU(2) (spin) stany bazowe numerowaliśmy wartością spinu i trzeciej składowej

$$\mathbf{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad \text{operator Casimira}$$

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle,$$

Numeracja ta dotyczy reprezentacji fundamentalnej i wyżej wymiarowych.

# Grupa SU(2)

## Konstrukcja reprezentacji

definiujemy op. obniżania i podwyższania  $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$

i wyliczamy ich działanie na stany  $|j, m\rangle$

$$\begin{aligned} J_+ |j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \\ J_- |j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \end{aligned}$$

# Grupa SU(2)

## Konstrukcja reprezentacji

definiujemy op. obniżania i podwyższania  $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$

i wyliczamy ich działanie na stany  $|j, m\rangle$

$$\begin{aligned} J_+ |j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \\ J_- |j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \end{aligned}$$

Stan o własności  $J_+ |j, j\rangle = 0$  nazywamy *najwyższą wagą* i działając kolejno na ten stan operatorem  $J_-$  znajdujemy wszystkie stany reprezentacji o spinie  $j$

Ostatni stan:  $J_- |j, -j\rangle = 0$

# Grupa SU(2)

## Konstrukcja reprezentacji

definiujemy op. obniżania i podwyższania  $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$

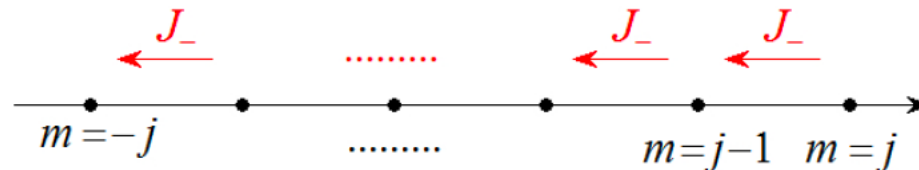
i wyliczamy ich działanie na stany  $|j, m\rangle$

$$J_+ |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle$$

$$J_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle$$

Stan o własności  $J_+ |j, j\rangle = 0$  nazywamy *najwyższą wagą* i działając kolejno na ten stan operatorem  $J_-$  znajdujemy wszystkie stany reprezentacji o spinie  $j$

Ostatni stan:  $J_- |j, -j\rangle = 0$



# Stany bazowe dla $SU(N)$

W przypadku grupy  $SU(2)$  (spin) stany bazowe numerowaliśmy wartością spinu i trzeciej składowej

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle && \text{operator Casimira} \\ J_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle,\end{aligned}$$

Numeracja ta dotyczy reprezentacji fundamentalnej i wyżej wymiarowych.

## Twierdzenie Racah

Rząd grupy  $R$ : liczba dających się równocześnie zdiagnozować generatorów. Dla  $SU(2)$  tylko jeden:  $T_3$ . Ogólnie dla  $SU(N)$   $R = N - 1$ . Dla  $SU(3)$   $T_3$  oraz  $T_8$ .

# Stany bazowe dla $SU(N)$

W przypadku grupy  $SU(2)$  (spin) stany bazowe numerowaliśmy wartością spinu i trzeciej składowej

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle && \text{operator Casimira} \\ J_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle,\end{aligned}$$

Numeracja ta dotyczy reprezentacji fundamentalnej i wyżej wymiarowych.

## Twierdzenie Racah

Rząd grupy  $R$ : liczba dających się równocześnie zdiagnozować generatorów. Dla  $SU(2)$  tylko jeden:  $T_3$ . Ogólnie dla  $SU(N)$   $R = N - 1$ . Dla  $SU(3)$   $T_3$  oraz  $T_8$ .

Istnieje zbiór  $R$  operatorów niezmienniczych  $C_\lambda(T^1, \dots, T^n)$  ( $\lambda = 1, \dots, R$ ) zwanych operatorami Casimira, które komutują ze wszystkimi generatorami i między sobą:

$$[C_\lambda, C_{\lambda'}] = 0$$

Wartości operatorów Casimira numerują reprezentację,  $R$  diagonalnych operatorów numeruje stany. Jeżeli dana grupa posiada podgrupę, to op. Casimira tej podgrupy też numerują stany.

# Stany bazowe dla SU(3)

Dla grupy SU(3) mamy dwa operatory Casimira

$$C_2 = \sum_i (T^i)^2 \quad C_3 = \sum_{ijk} d^{ijk} T^i T^j T^k$$

gdzie  $d^{ijk}$

$$\lambda^i \lambda^j = \frac{2}{3} \delta^{ij} \mathbf{1} + i f^{ijk} \lambda^k + d^{ijk} \lambda^k$$

można wyliczyć ze wzoru:  $\{\lambda^i, \lambda^j\} = \lambda^i \lambda^j + \lambda^j \lambda^i = \frac{4}{3} \delta^{ij} \mathbf{1} + 2 d^{ijk} \lambda^k$



# Stany bazowe dla SU(3)

Dla grupy SU(3) mamy dwa operatory Casimira

$$C_2 = \sum_i (T^i)^2 \quad C_3 = \sum_{ijk} d^{ijk} T^i T^j T^k$$

gdzie  $d^{ijk}$

$$\lambda^i \lambda^j = \frac{2}{3} \delta^{ij} \mathbf{1} + i f^{ijk} \lambda^k + d^{ijk} \lambda^k$$

można wyliczyć ze wzoru:  $\{\lambda^i, \lambda^j\} = \lambda^i \lambda^j + \lambda^j \lambda^i = \frac{4}{3} \delta^{ij} \mathbf{1} + 2 d^{ijk} \lambda^k$

Dla reprezentacji fundamentalnej  $C_2(\text{fund.}) = C_F = \frac{4}{3}$ ,  $C_3(\text{fund.}) = +\frac{10}{9}$

i dla sprzężonej  $C_2(\overline{\text{fund.}}) = C_F = \frac{4}{3}$ ,  $C_3(\overline{\text{fund.}}) = -\frac{10}{9}$

# Stany bazowe dla SU(3)

Dla grupy SU(3) mamy dwa operatory Casimira

$$C_2 = \sum_i (T^i)^2 \quad C_3 = \sum_{ijk} d^{ijk} T^i T^j T^k$$

gdzie  $d^{ijk}$

$$\lambda^i \lambda^j = \frac{2}{3} \delta^{ij} \mathbf{1} + i f^{ijk} \lambda^k + d^{ijk} \lambda^k$$

można wyliczyć ze wzoru:  $\{\lambda^i, \lambda^j\} = \lambda^i \lambda^j + \lambda^j \lambda^i = \frac{4}{3} \delta^{ij} \mathbf{1} + 2 d^{ijk} \lambda^k$

Dla reprezentacji fundamentalnej  $C_2(\text{fund.}) = C_F = \frac{4}{3}$ ,  $C_3(\text{fund.}) = +\frac{10}{9}$

i dla sprzężonej  $C_2(\overline{\text{fund.}}) = C_F = \frac{4}{3}$ ,  $C_3(\overline{\text{fund.}}) = -\frac{10}{9}$

W praktyce używa się *wymiaru* reprezentacji i znaku sprzężenia: **3** oraz  $\overline{\mathbf{3}}$

# Stany bazowe dla SU(3)

Zatem reprezentację  $\mathcal{R}$  numerujemy wymiarem i znakiem sprzężenia (lub  $C_2$  i  $C_3$ .) natomiast stany w tej reprezentacji diagonalnymi generatorami i op. Casimira podgrupy SU(2):

$$\sum_{n=1}^3 \hat{T}_n^2 |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle = T(T+1) |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle,$$

$$\hat{T}_3 |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle = T_3 |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle,$$

$$\hat{Y} |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle = Y |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle. \quad \hat{Y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{T}_8$$

# Podgrupy SU(2)

$$\lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

izospin

$$\lambda^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

# Podgrupy SU(2)

$$\lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

izospin

$$\lambda^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} (\sqrt{3} \lambda^8 + \lambda^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

V-spin

$$\lambda^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

# Podgrupy SU(2)

$$\lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

izospin

$$\lambda^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} (\sqrt{3} \lambda^8 - \lambda^3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

U-spin

$$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

# Podgrupy SU(2)

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2V^3 \equiv \frac{1}{2} (\sqrt{3} \lambda^8 + \lambda_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \lambda^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad 2U^3 \equiv \frac{1}{2} (\sqrt{3} \lambda^8 - \lambda_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

# Podgrupy SU(2)

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2V^3 \equiv \frac{1}{2} (\sqrt{3} \lambda^8 + \lambda_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \lambda^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad 2U^3 \equiv \frac{1}{2} (\sqrt{3} \lambda^8 - \lambda_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Definiujemy operatory podwyższania i obniżania dla każdej z podgrup SU(2):

$$T_{\pm} = T^1 \pm iT^2, \quad V_{\pm} = T^4 \pm iT^5, \quad U_{\pm} = T^6 \pm iT^7.$$



# Operatory obniżania i podwyższania

$$T_{\pm} = T^1 \pm iT^2, \quad V_{\pm} = T^4 \pm iT^5, \quad U_{\pm} = T^6 \pm iT^7.$$

Relacje komutacji:

$$\begin{aligned} [T_+, T_-] &= 2T_3, & [T_3, T_{\pm}] &= \pm T_{\pm}, \\ [U_+, U_-] &= 2U_3, & [U_3, U_{\pm}] &= \pm U_{\pm}, \\ [V_+, V_-] &= 2V_3, & [V_3, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm}, \end{aligned}$$

Korzystając z jawnej postaci macierzy Gell-Manna można pokazać, że  $[\hat{T}_3, \check{\hat{V}}_{\pm}] = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_{\pm}$

# Operatory obniżania i podwyższania

$$T_{\pm} = T^1 \pm iT^2, \quad V_{\pm} = T^4 \pm iT^5, \quad U_{\pm} = T^6 \pm iT^7.$$

Relacje komutacji:

$$\begin{aligned} [T_+, T_-] &= 2T_3, & [T_3, T_{\pm}] &= \pm T_{\pm}, \\ [U_+, U_-] &= 2U_3, & [U_3, U_{\pm}] &= \pm U_{\pm}, \\ [V_+, V_-] &= 2V_3, & [V_3, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm}, \end{aligned}$$

Korzystając z jawnej postaci macierzy Gell-Manna można pokazać, że  $[\hat{T}_3, \hat{V}_{\pm}] = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_{\pm}$   
Zadziałajmy tym komutatorem na jakiś stan:

$$\begin{aligned} \left( \hat{T}_3 \hat{V}_{\pm} - \hat{V}_{\pm} \hat{T}_3 \right) |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle &= \left( \hat{T}_3 \hat{V}_{\pm} - T_3 \hat{V}_{\pm} \right) |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle \\ &= \pm \frac{1}{2} \hat{V}_{\pm} |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle \end{aligned}$$

# Operatory obniżania i podwyższania

$$T_{\pm} = T^1 \pm iT^2, \quad V_{\pm} = T^4 \pm iT^5, \quad U_{\pm} = T^6 \pm iT^7.$$

Relacje komutacji:

$$\begin{aligned} [T_+, T_-] &= 2T_3, & [T_3, T_{\pm}] &= \pm T_{\pm}, \\ [U_+, U_-] &= 2U_3, & [U_3, U_{\pm}] &= \pm U_{\pm}, \\ [V_+, V_-] &= 2V_3, & [V_3, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm}, \end{aligned}$$

Korzystając z jawnej postaci macierzy Gell-Manna można pokazać, że  $[\hat{T}_3, \hat{V}_{\pm}] = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_{\pm}$   
Zadziałajmy tym komutatorem na jakiś stan:

$$\begin{aligned} (\hat{T}_3 \hat{V}_{\pm} - \hat{V}_{\pm} \hat{T}_3) |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle &= (\hat{T}_3 \hat{V}_{\pm} - T_3 \hat{V}_{\pm}) |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle \\ &= \pm \frac{1}{2} \hat{V}_{\pm} |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle \end{aligned}$$

$$\hat{T}_3 (\hat{V}_{\pm} |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle) = \left(T_3 \pm \frac{1}{2}\right) (\hat{V}_{\pm} |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle)$$

# Operatory obniżania i podwyższania

Analogicznie, z relacji  $[\hat{Y}, \hat{V}_{\pm}] = \pm \hat{V}_{\pm}$  wynika

$$\hat{Y} \left( \hat{V}_{\pm} |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle \right) = (Y \pm 1) \left( \hat{V}_{\pm} |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle \right)$$

# Operatory obniżania i podwyższania

Analogicznie, z relacji  $[\hat{Y}, \hat{V}_{\pm}] = \pm \hat{V}_{\pm}$  wynika

$$\hat{Y} \left( \hat{V}_{\pm} |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle \right) = (Y \pm 1) \left( \hat{V}_{\pm} |(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle \right)$$

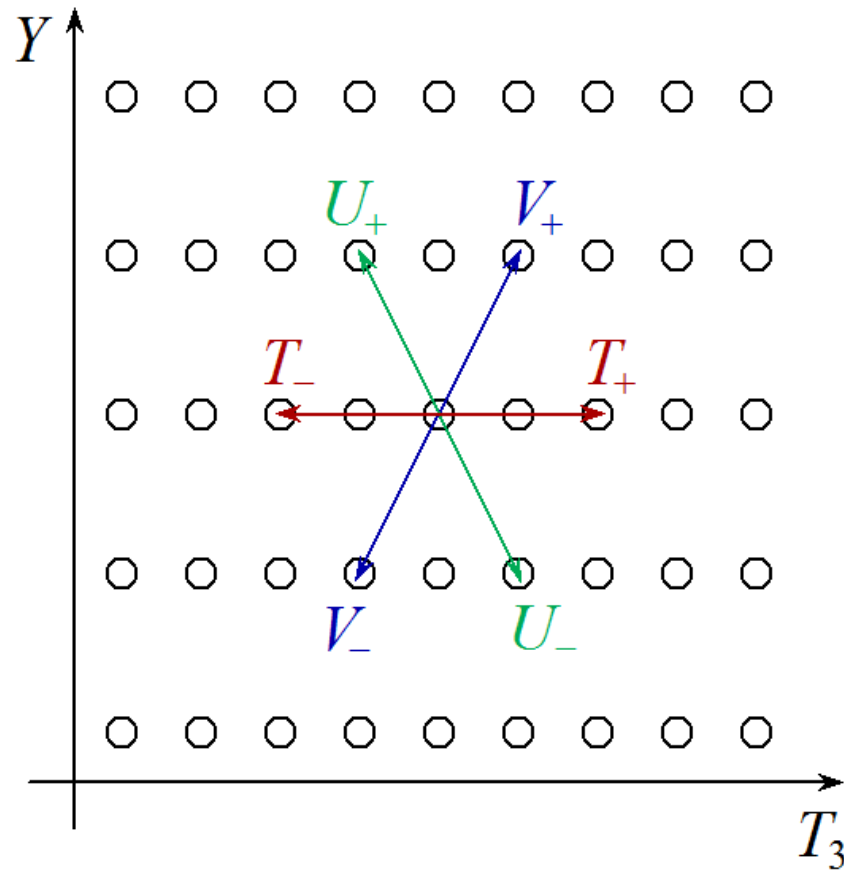
Analogicznie dla U:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\pm} |(\mathcal{R}), Y, T, T_3\rangle &= \alpha_V^{\pm} \left| (\mathcal{R}), Y \pm 1, T + \frac{1}{2}, T_3 \pm \frac{1}{2} \right\rangle + \beta_V^{\pm} \left| (\mathcal{R}), Y \pm 1, T - \frac{1}{2}, T_3 \pm \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \hat{U}_{\pm} |(\mathcal{R}), Y, T, T_3\rangle &= \alpha_U^{\pm} \left| (\mathcal{R}), Y \pm 1, T + \frac{1}{2}, T_3 \mp \frac{1}{2} \right\rangle + \beta_U^{\pm} \left| (\mathcal{R}), Y \pm 1, T - \frac{1}{2}, T_3 \mp \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

**Uwaga:** stan o obniżonym lub podwyższonym  $T_3 \pm \frac{1}{2}$  może mieć  $T + \frac{1}{2}$  lub  $T - \frac{1}{2}$   
współczynniki są znane

# Operatory obniżania i podwyższania

Stany przedstawiamy  
jako punkty na  
płaszczyźnie  $(T_3, Y)$



$|(\mathcal{R}) Y, T, T_3\rangle$

# Reprezentacje $3$ i $\bar{3}$

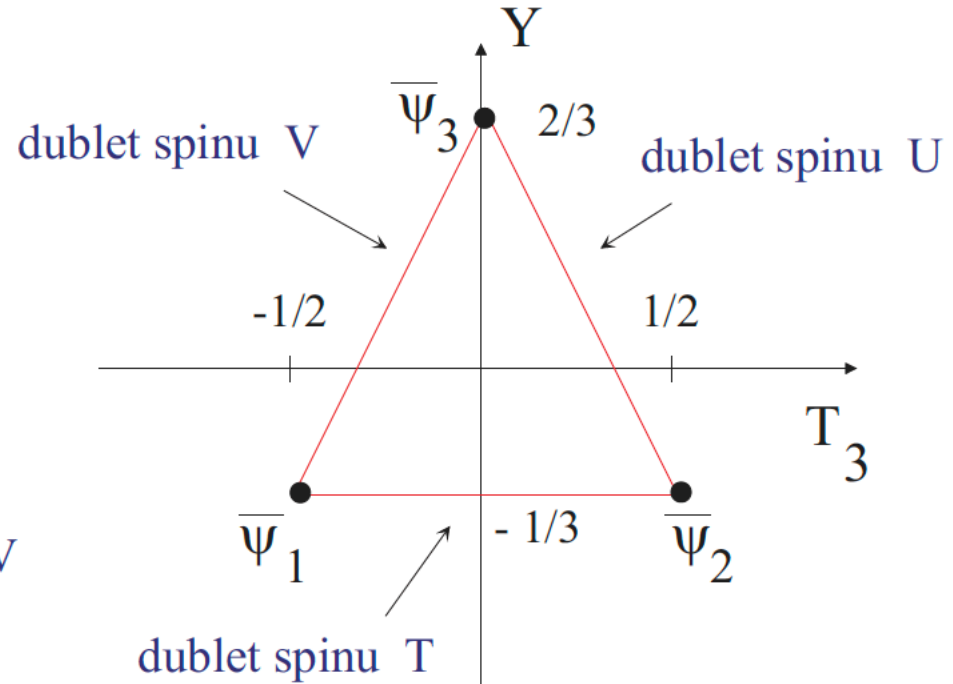
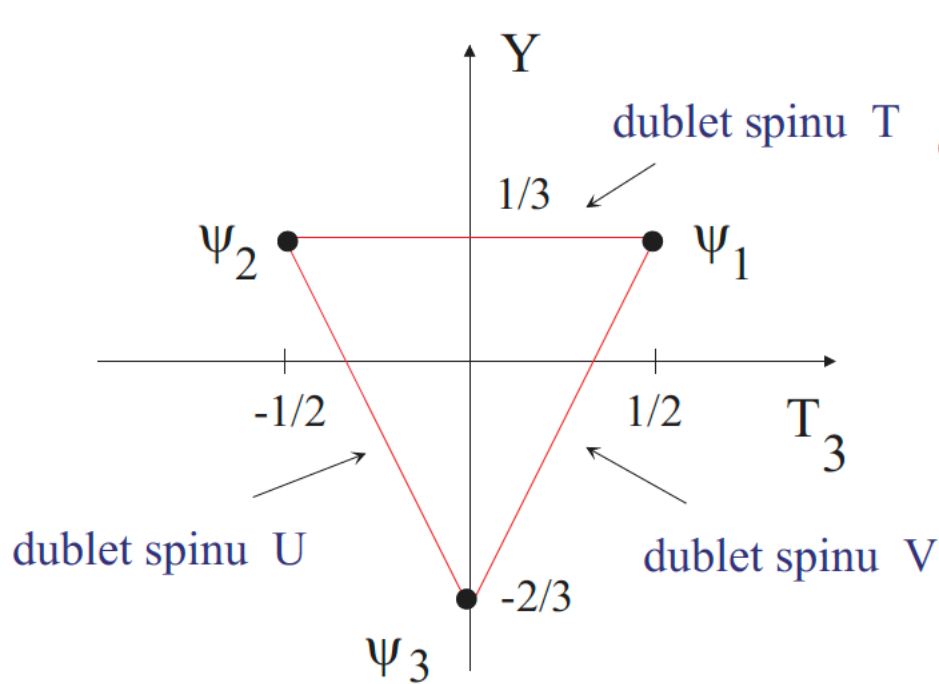
$$\begin{aligned}\psi_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, & \bar{\psi}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\bar{\mathbf{3}}) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ \psi_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, & \bar{\psi}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\bar{\mathbf{3}}) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \psi_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\mathbf{3}) -\frac{2}{3}, 0, 0 \right\rangle, & \bar{\psi}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\bar{\mathbf{3}}) \frac{2}{3}, 0, 0 \right\rangle.\end{aligned}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Generatory reprezentacji sprzężonej

$-T_m^*$

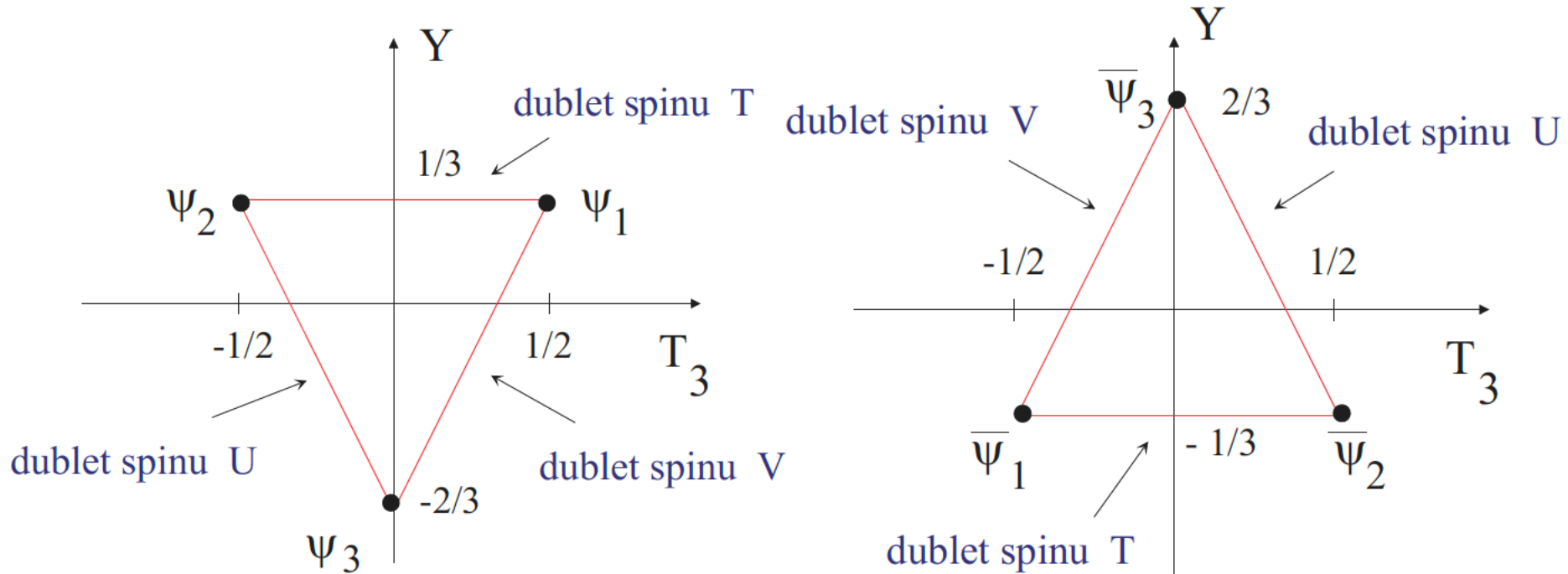
# Reprezentacje 3 i $\bar{3}$



Różne konwencje na fazy  $\bar{3}$



# Reprezentacje $3$ i $\bar{3}$



Różne konwencje na fazy  $\bar{3}$

Podobnie jak wyższe spiny pojawiają się w wielokrotnym złożeniu reprezentacji  $1/2$ , tak i w grupie  $SU(3)$  wyższe reprezentacje pojawiają się w wielokrotnym złożeniu trypletu i antytrypletu. Wymaga to konstrukcji szeregu Clebscha-Grdana dla  $SU(3)$ .

# Składanie reprezentacji fundamentalnych

Jak transformuje się tensor  $\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)}$ , gdzie indeksy  $a$  i  $b$  numerują stany w rep. fundamentalnej? Dla SU(2)

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

Dla SU(3) powinniśmy skonstruować szereg Clebscha-Gordana. Podamy tu bez dowodu metodę opartą na diagramach Younga.

# Składanie reprezentacji fundamentalnych

Jak transformuje się tensor  $\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)}$ , gdzie indeksy  $a$  i  $b$  numerują stany w rep. fundamentalnej? Dla SU(2)

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

Dla SU(3) powinniśmy skonstruować szereg Clebscha-Gordana. Podamy tu bez dowodu metodę opartą na diagramach Younga.

Rozpiszmy

$$\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} = \frac{1}{2} \underbrace{\left( \psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} + \psi_b^{(1)}\psi_a^{(2)} \right)}_{S_{ab}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left( \psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} - \psi_b^{(1)}\psi_a^{(2)} \right)}_{A_{ab}}$$

liczba elementów

$$N(N+1)/2 \qquad N(N-1)/2$$

Tensorzy  $S_{ab}$  i  $A_{ab}$  transformują się niezależnie.

# Składanie reprezentacji fundamentalnych

Jak transformuje się tensor  $\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)}$ , gdzie indeksy  $a$  i  $b$  numerują stany w rep. fundamentalnej? Dla SU(2)

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

Dla SU(3) powinniśmy skonstruować szereg Clebscha-Gordana. Podamy tu bez dowodu metodę opartą na diagramach Younga.

Rozpiszmy 
$$\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} = \frac{1}{2} \underbrace{\left( \psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} + \psi_b^{(1)}\psi_a^{(2)} \right)}_{S_{ab}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left( \psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} - \psi_b^{(1)}\psi_a^{(2)} \right)}_{A_{ab}}$$

liczba niezal. elementów 
$$N(N+1)/2 \qquad N(N-1)/2$$

Tensorzy  $S_{ab}$  i  $A_{ab}$  transformują się niezależnie.

SU(2)	3 (spin 1)	1 (spin 0)
SU(3)	6	$\bar{3}$

# Składanie reprezentacji fundamentalnych

Jak transformuje się tensor  $\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)}$ , gdzie indeksy  $a$  i  $b$  numerują stany w rep. fundamentalnej? Dla SU(2)

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

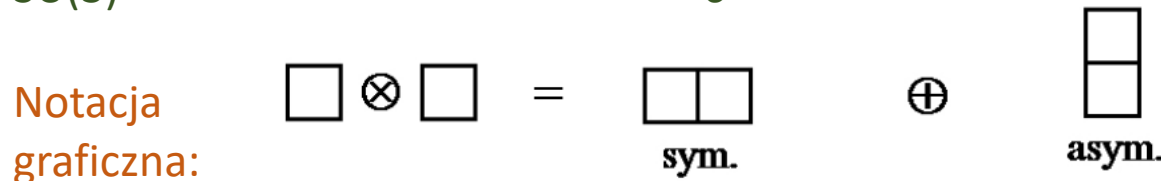
Dla SU(3) powinniśmy skonstruować szereg Clebscha-Gordana. Podamy tu bez dowodu metodę opartą na diagramach Younga.

Rozpiszmy 
$$\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} + \psi_b^{(1)}\psi_a^{(2)}\right)}_{S_{ab}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} - \psi_b^{(1)}\psi_a^{(2)}\right)}_{A_{ab}}$$

liczba niezal. elementów 
$$N(N+1)/2 \qquad N(N-1)/2$$

Tensory  $S_{ab}$  i  $A_{ab}$  transformują się niezależnie.

SU(2) 3 (spin 1) 1 (spin 0)  
 SU(3) 6  $\frac{3}{2}$



# Składanie reprezentacji fundamentalnych

Jak transformuje się tensor  $\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)}$ , gdzie indeksy  $a$  i  $b$  numerują stany w rep. fundamentalnej? Dla SU(2)

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

Dla SU(3) powinniśmy skonstruować szereg Clebscha-Gordana. Podamy tu bez dowodu metodę opartą na diagramach Younga.

Rozpiszmy 
$$\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} + \psi_b^{(1)}\psi_a^{(2)}\right)}_{S_{ab}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} - \psi_b^{(1)}\psi_a^{(2)}\right)}_{A_{ab}}$$

liczba niezal. elementów 
$$N(N+1)/2 \qquad N(N-1)/2$$

Tensory  $S_{ab}$  i  $A_{ab}$  transformują się niezależnie.

SU(2)		3 (spin 1)		1 (spin 0)		
SU(3)		6		$\bar{3}$		
Notacja	$\square \otimes \square$	=	$\square \square$	$\oplus$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	maksymalna wysokość kolumny wynosi $N$
graficzna:			sym.		asym.	

# Iloczyn reprezentacji fundamentalnych

$$\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} + \psi_b^{(1)}\psi_a^{(2)}\right)}_{S_{ab}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)} - \psi_b^{(1)}\psi_a^{(2)}\right)}_{A_{ab}}$$

"Kwadraciki" z drugiej reprezentacji dorysowujemy do pierwszej na wszystkie możliwe sposoby

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

sym.      asym.

SU(2)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad s=1$$

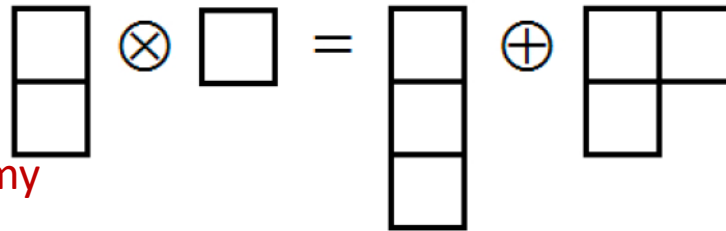
$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad s=0$$

SU(3)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} \quad 6$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \bar{3}$$

# Iloczyn $\bar{3}$ i 3 dla SU(3)



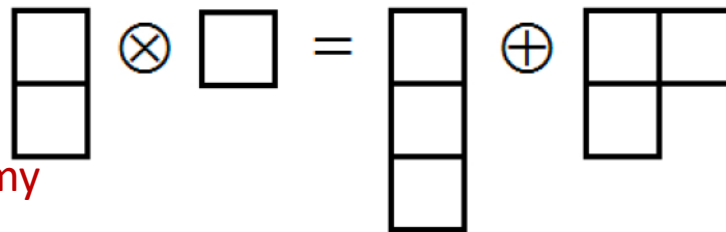
"Kwadraciki" z drugiej reprezentacji dorysowujemy do pierwszej na wszystkie możliwe sposoby

$$\varepsilon_{abc} \psi_a^{(1)} \psi_b^{(2)} \psi_c^{(3)} \quad \text{singlet}$$



# Iloczyn $\bar{3}$ i 3 dla SU(3)

"Kwadraciki" z drugiej reprezentacji dorysowujemy do pierwszej na wszystkie możliwe sposoby



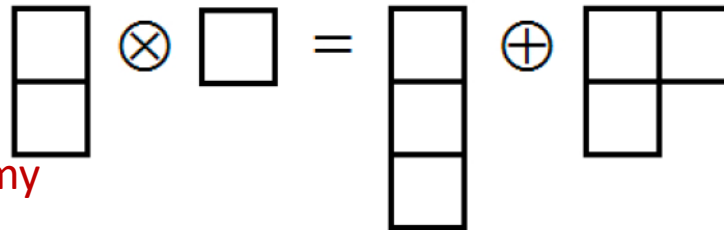
$$\varepsilon_{abc} \psi_a^{(1)} \psi_b^{(2)} \psi_c^{(3)} \quad \text{singlet}$$

$$\bar{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{R} \rightarrow \text{singlet} \oplus \dots$$

Reprezentacja  $\bar{\mathcal{R}}$  sprzężona do  $\mathcal{R}$  jest dopełnieniem  $\mathcal{R}$  do singletu

# Iloczyn $\bar{3}$ i 3 dla SU(3)

"Kwadraciki" z drugiej reprezentacji dorysowujemy do pierwszej na wszystkie możliwe sposoby



oktet (reprezentacja dołączona)

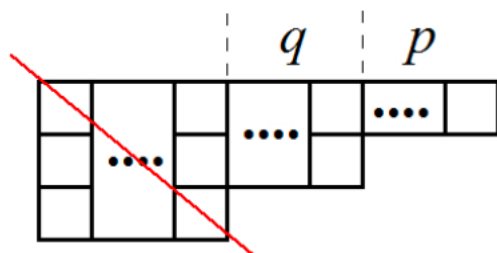
$$\varepsilon_{abc} \psi_a^{(1)} \psi_b^{(2)} \psi_c^{(3)} \quad \text{singlet}$$

$$\bar{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{R} \rightarrow \text{singlet} \oplus \dots$$

Reprezentacja  $\bar{\mathcal{R}}$  sprzężona do  $\mathcal{R}$  jest dopełnieniem  $\mathcal{R}$  do singletu

Stopnie swobody:  $3 \times 3 = 9 = 1 + 8$

# Diagramy Younga dla grupy SU(3)

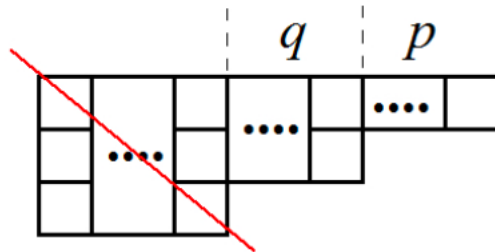


„Generyczny” diagram Younga dla grupy SU(3)

$p$  kolumn jedno-elementowych (kwarki),  $q$  kolumn dwu-elementowych (antykwarci)  
dowolna liczba kolumn trzy-elementowych (singlety), które wykreślamy.

Długość wierszy jest uporządkowana od góry do dołu (mogą być równe).

# Diagramy Younga dla grupy SU(3)



„Generyczny” diagram Younga dla grupy SU(3)

$p$  kolumn jedno-elementowych (kwarki),  $q$  kolumn dwu-elementowych (antykwaraki)  
dowolna liczba kolumn trzy-elementowych (singlety), które wykreślamy.

Długość wierszy jest uporządkowana od góry do dołu (mogą być równe).

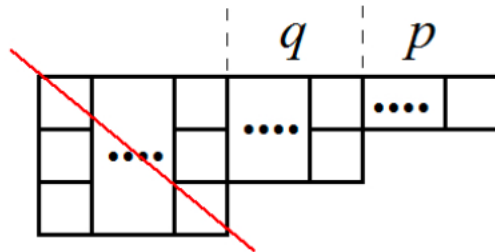
Para liczb naturalnych  $(p, q)$  jednoznacznie definiuje reprezentację

$$\dim(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$$

$$C_2(p, q) = p + q + \frac{1}{3}(p^2 + q^2 + pq)$$

$$C_3(p, q) = \frac{1}{18}(p-q)(3+p+2q)(3+q+2p)$$

# Diagramy Younga dla grupy SU(3)



„Generyczny” diagram Younga dla grupy SU(3)

$p$  kolumn jedno-elementowych (kwarki),  $q$  kolumn dwu-elementowych (antykwarci)  
dowolna liczba kolumn trzy-elementowych (singlety), które wykreślamy.

Długość wierszy jest uporządkowana od góry do dołu (mogą być równe).

Para liczb naturalnych  $(p, q)$  jednoznacznie definiuje reprezentację

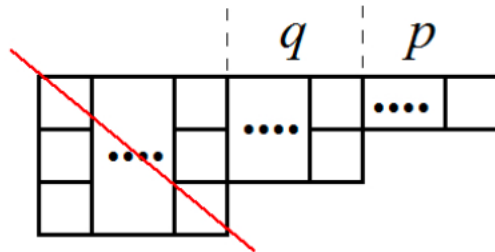
$$\dim(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$$

$$C_2(p, q) = p + q + \frac{1}{3}(p^2 + q^2 + pq)$$

$$\mathcal{R} = (p, q) \quad \bar{\mathcal{R}} = (q, p)$$

$$C_3(p, q) = \frac{1}{18}(p-q)(3+p+2q)(3+q+2p)$$

# Diagramy Younga dla grupy SU(3)



„Generyczny” diagram Younga dla grupy SU(3)

$p$  kolumn jedno-elementowych (kwarki),  $q$  kolumn dwu-elementowych (antykwarci)  
dowolna liczba kolumn trzy-elementowych (singlety), które wykreślamy.

Długość wierszy jest uporządkowana od góry do dołu (mogą być równe).

Para liczb naturalnych  $(p, q)$  jednoznacznie definiuje reprezentację

$$\dim(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$$

$$C_2(p, q) = p + q + \frac{1}{3}(p^2 + q^2 + pq)$$

$$\mathbf{3} = (1, 0), \quad \bar{\mathbf{3}} = (0, 1)$$

$$C_3(p, q) = \frac{1}{18}(p-q)(3+p+2q)(3+q+2p)$$

# Reguły mnożenia reprezentacji

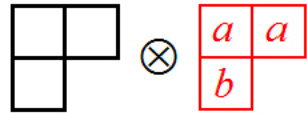
Rysujemy diagramy Younga dla reprezentacji, które chcemy pomnożyć:  $(p_1, q_1) \otimes (p_2, q_2)$ . W drugim diagramie wszystkie komórki w pierwszym wierszu oznaczamy przez  $a$ , a komórki w drugim wierszu przez  $b$ . Następnie wszystkie komórki  $a$  z pierwszego rzędu dodajemy do diagramu  $(p_1, q_1)$ , tak aby nie były one w jednej kolumnie. W ten sposób generujemy kilka nowych diagramów Younga, do których dodajemy komórki  $b$ , tak aby nie były one w jednej kolumnie (i tak aby były spełnione ogólne zasady konstrukcji diagramów Younga: drugi wiersz nie może być dłuższy od pierwszego, a trzeci od drugiego, kolumny mogą mieć co najwyżej 3 komórki) i aby spełniony był dodatkowy warunek: idąc wzdłuż wierszy diagramu Younga od prawej do lewej i od góry do dołu, liczba napotkanych komórek  $a$  musi być równa lub większa od liczby komórek  $b$ . Na końcu wykreślamy wszystkie singlety i obliczamy wymiar reprezentacji

# Przykład: 8 x 8

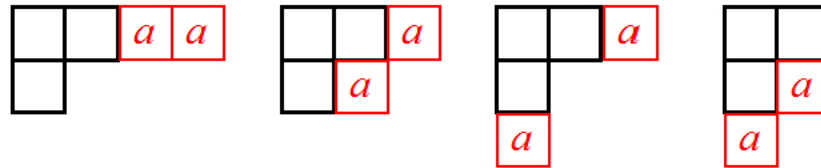
$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array}$$



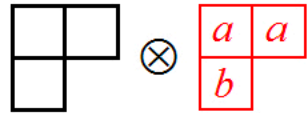
# Przykład: 8 x 8



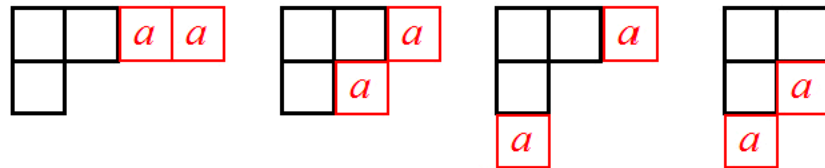
krok 1



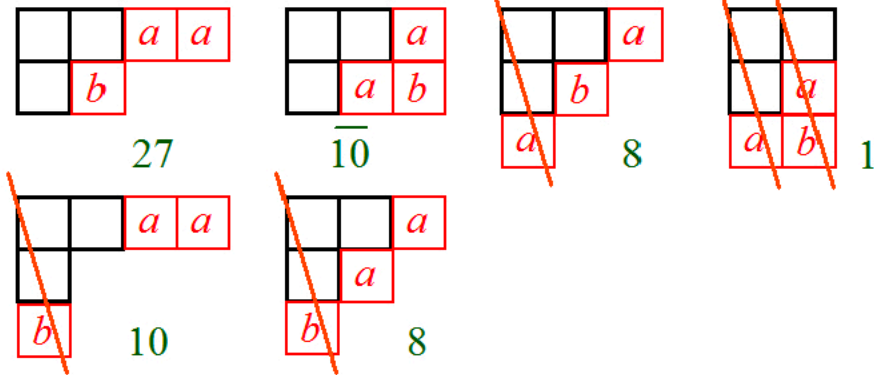
# Przykład: 8 x 8



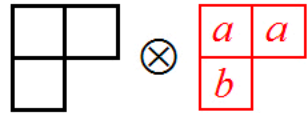
krok 1



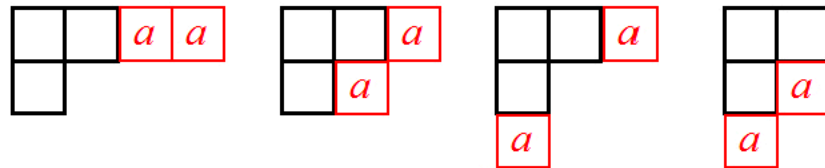
krok 2



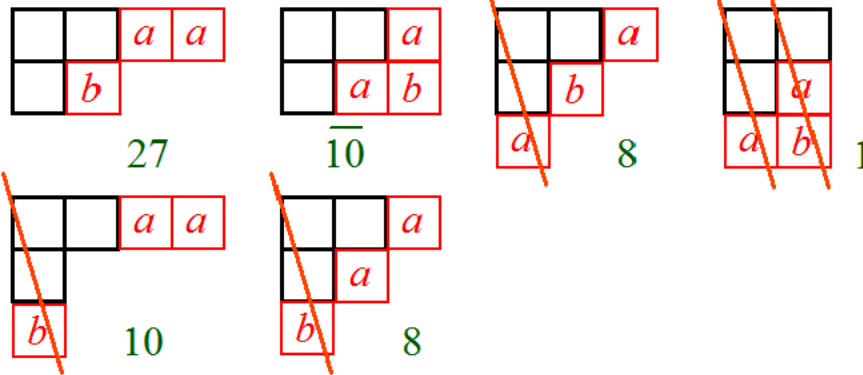
# Przykład: 8 x 8



krok 1

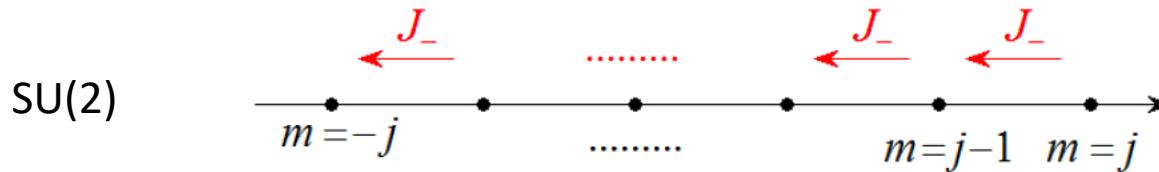


krok 2



$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8_1 \oplus 8_2 \oplus 10 \oplus \overline{10} \oplus 27$$

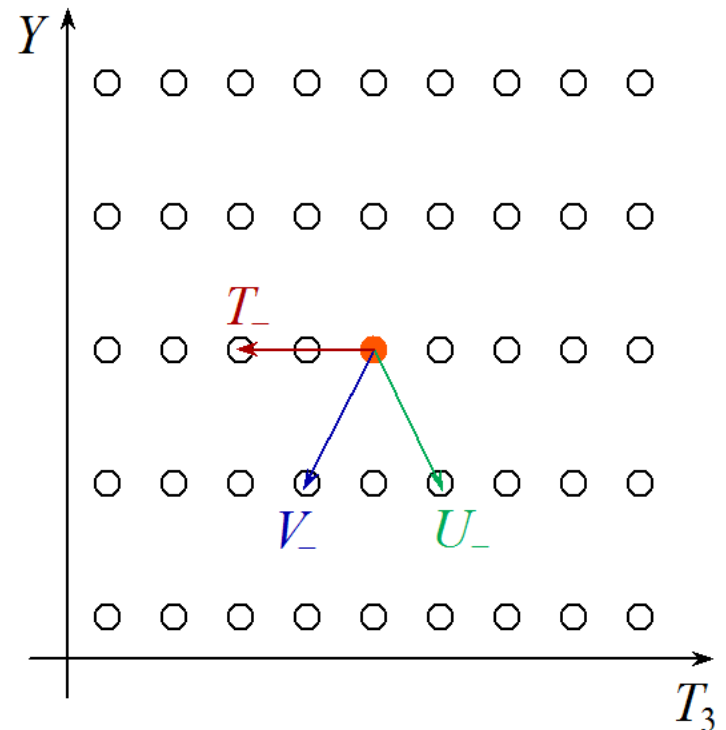
# Konstrukcja reprezentacji



Przez analogię z SU(2)  $J_+ |j, j\rangle = 0$  definiujemy tzw. najwyższą wagę

$$\left. \begin{array}{l} T^+ \\ V^+ \\ U^+ \end{array} \right\} |(p, q) \text{ najwyższa waga}\rangle = 0$$

i następnie działamy operatorami obniżania, aż dostaniemy zera.



# Konstrukcja reprezentacji

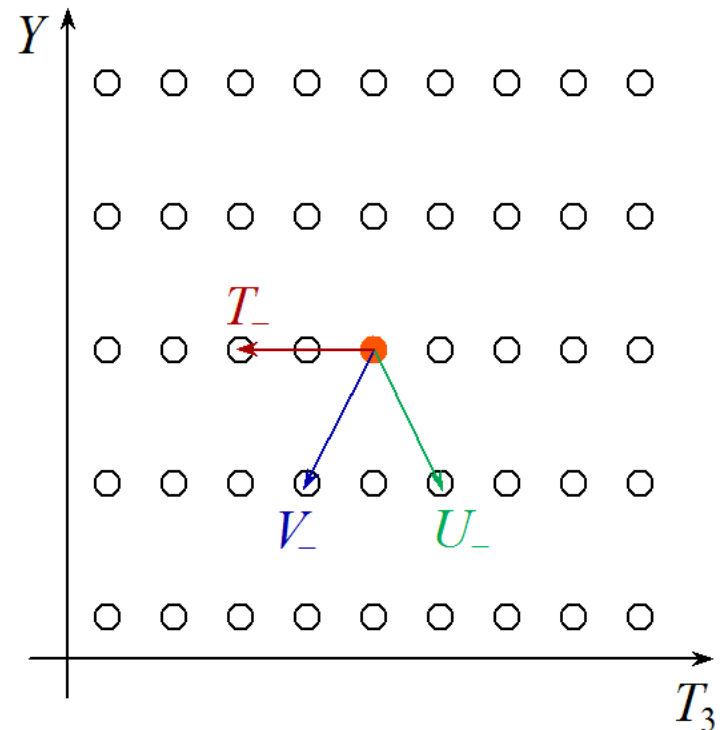


Przez analogię z SU(2)  $J_+ |j, j\rangle = 0$  definiujemy tzw. najwyższą wagę

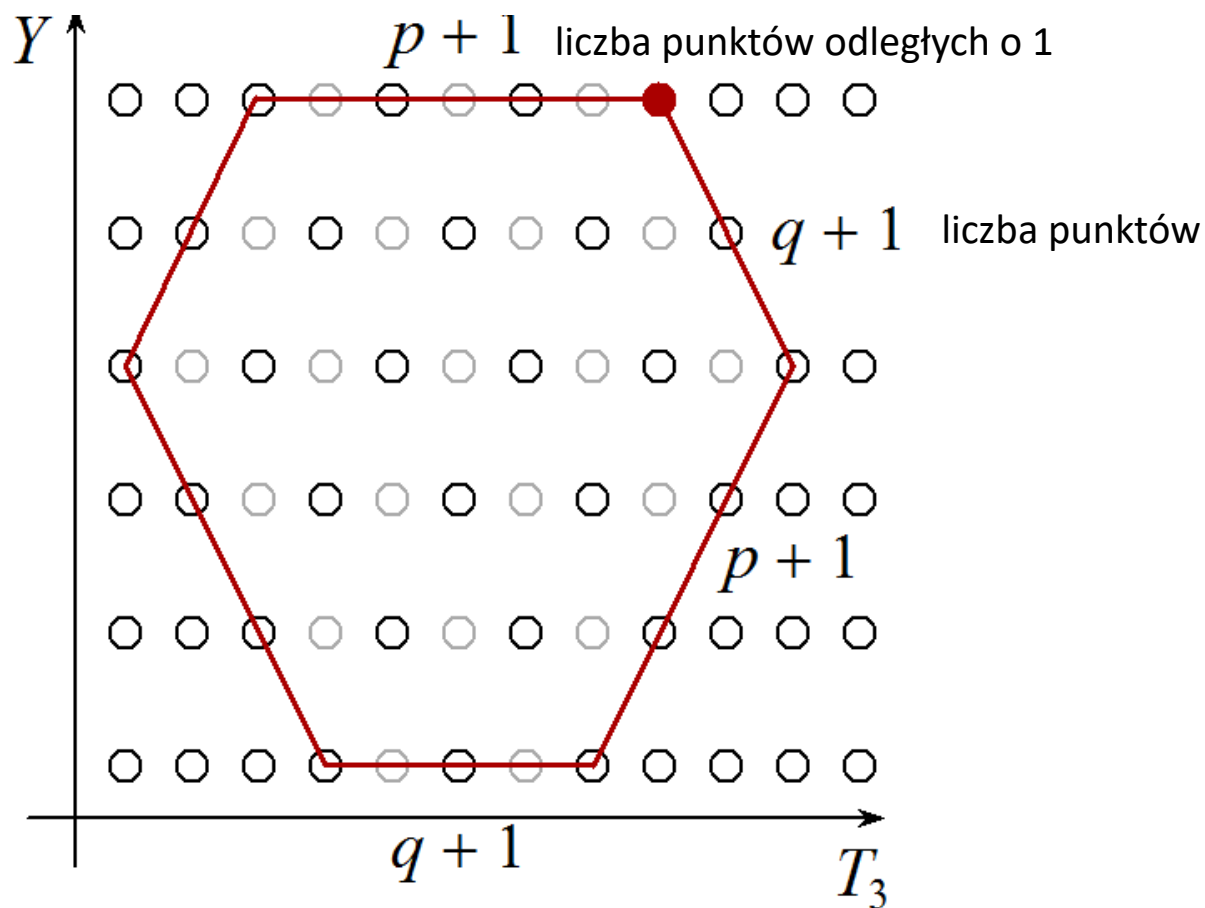
$$\left. \begin{array}{l} T^+ \\ V^+ \\ U^+ \end{array} \right\} |(p, q) \text{ najwyższa waga}\rangle = 0$$

i następnie działamy operatorami obniżania, aż dostaniemy zera.

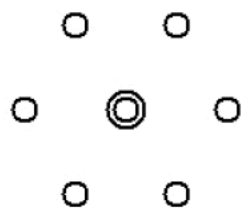
$$\begin{aligned} |(p, q) \text{ najwyższa waga}\rangle &= \\ &= \left| (p, q), Y = \frac{p+2q}{3}, I = \frac{p}{2}, I_3 = \frac{p}{2} \right\rangle \end{aligned}$$



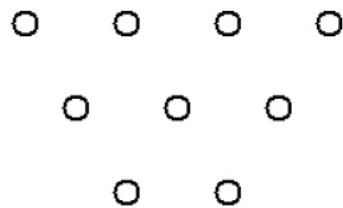
# Reprezentacja $(p, q)$



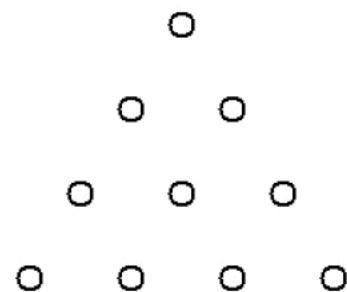
Wszystkie stany leżą wewnątrz wieloboku (razem z brzegami). Na jednym poziomym szczelnie może być kilka multipletów izospinowych.



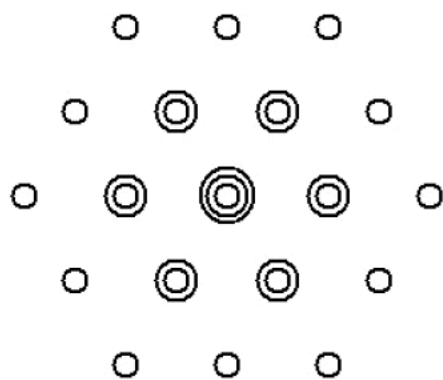
8



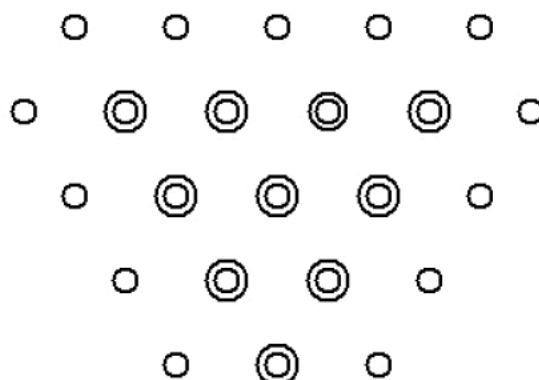
10



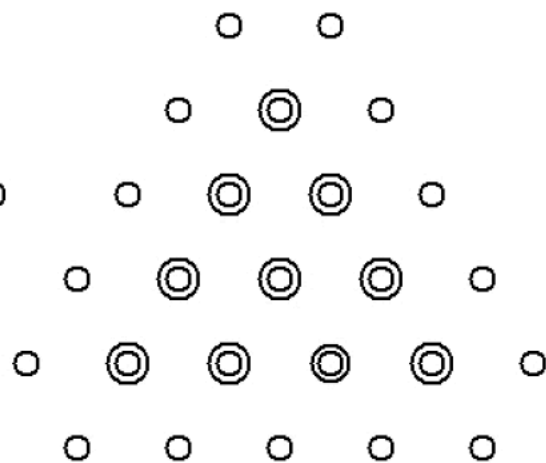
$\overline{10}$



27



35



$\overline{35}$

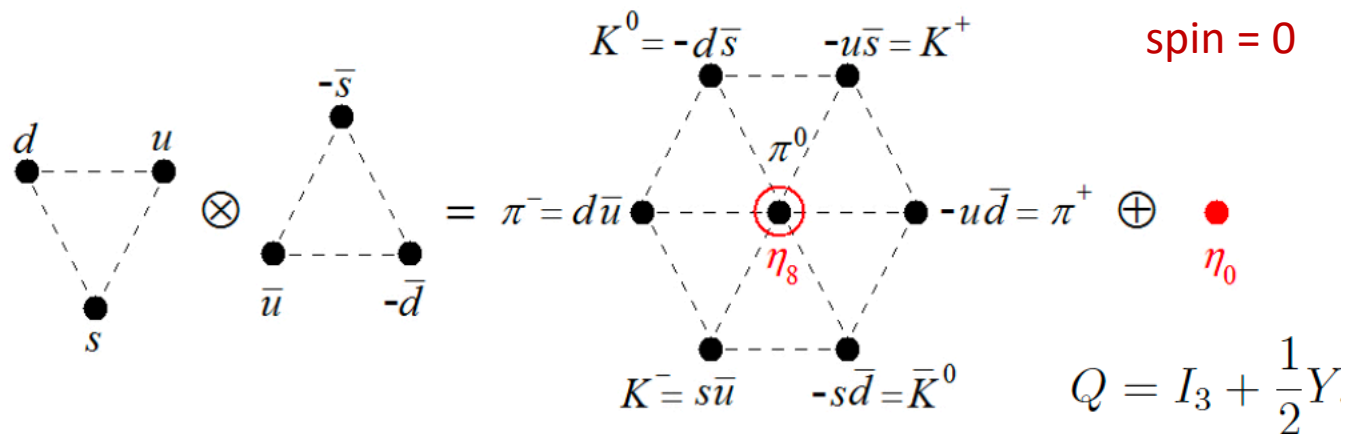
# Model kwarków – - mezony pseudoskalarne

Kwarki należą do reprezentacji fundamentalnej grupy SU(3), antykwarki do reprezentacji sprzężonej (fazy!):

$$\begin{aligned}
 |u\rangle &= \left| (\mathbf{3})_{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \right\rangle, & |\bar{u}\rangle &= \left| (\bar{\mathbf{3}})_{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right\rangle, \\
 |d\rangle &= \left| (\mathbf{3})_{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right\rangle, & |\bar{d}\rangle &= - \left| (\bar{\mathbf{3}})_{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \right\rangle, \\
 |s\rangle &= \left| (\mathbf{3})_{-\frac{2}{3}, 0, 0} \right\rangle, & |\bar{s}\rangle &= - \left| (\bar{\mathbf{3}})_{\frac{2}{3}, 0, 0} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Cząstki fizyczne składają się z kwarka i antykwarka (pamiętajmy, że kwarki są też trypletem e kolorze – QCD):

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$





# Model kwarków – - mezony pseudoskalarne

$|\pi^0\rangle, |\eta_8\rangle$  i  $|\eta_0\rangle$  są bardziej skomplikowane.

$$T_- |\pi^+\rangle = T_- |(\mathbf{8}) 0, 1, 1\rangle = \sqrt{2} |(\mathbf{8}) 0, 1, 0\rangle = \sqrt{2} |\pi^0\rangle$$

Z drugiej strony:

$$\begin{aligned} T_- |\pi^+\rangle &= -T_- |u\bar{d}\rangle \\ &= T_- \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| (\bar{\mathbf{3}}) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| (\bar{\mathbf{3}}) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| (\bar{\mathbf{3}}) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ &= |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle \end{aligned}$$

# Model kwarków – - mezony pseudoskalarne

$|\pi^0\rangle, |\eta_8\rangle$  i  $|\eta_0\rangle$  są bardziej skomplikowane.

$$T_- |\pi^+\rangle = T_- |(\mathbf{8}) 0, 1, 1\rangle = \sqrt{2} |(\mathbf{8}) 0, 1, 0\rangle = \sqrt{2} |\pi^0\rangle$$

Z drugiej strony:

$$\begin{aligned} T_- |\pi^+\rangle &= -T_- |u\bar{d}\rangle \\ &= T_- \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| (\bar{\mathbf{3}}) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| (\bar{\mathbf{3}}) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| (\bar{\mathbf{3}}) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ &= |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle \end{aligned}$$

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$$

# Model kwarków – - mezony pseudoskalarne

$|\eta_8\rangle$  i  $|\eta_0\rangle$

Postępujemy się współczynnikami Clebscha-Gordana dla grupy SU(3)

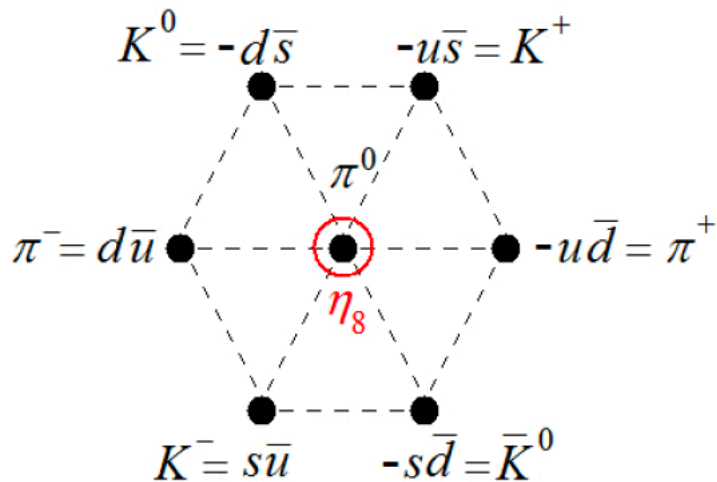
							$ \eta_0\rangle \quad  \eta_8\rangle \quad  \pi^0\rangle$		
$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$							$\mathbf{1}$	$\mathbf{8}$	$\mathbf{8}$
$s\bar{s}$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$0$	$\frac{2}{3}$	$0$	$0$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0$
$d\bar{d}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$u\bar{u}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$$|\eta_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle),$$

$$|\eta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle).$$

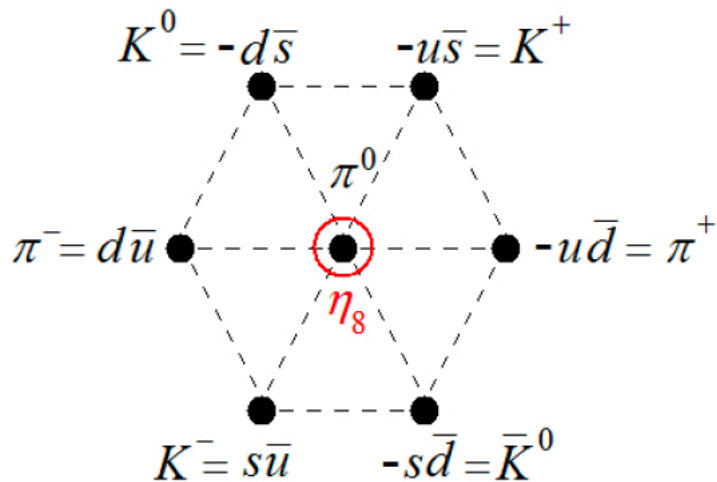
# Model kwarków – - mezony pseudoskalarne

Symetria SU(3) zakłada, że wszystkie kwarki mają te same masy, więc mezony w okcie są zdegenerowane. Cząstka singletowa ma inną masę.



# Model kwarków – - mezony pseudoskalarne

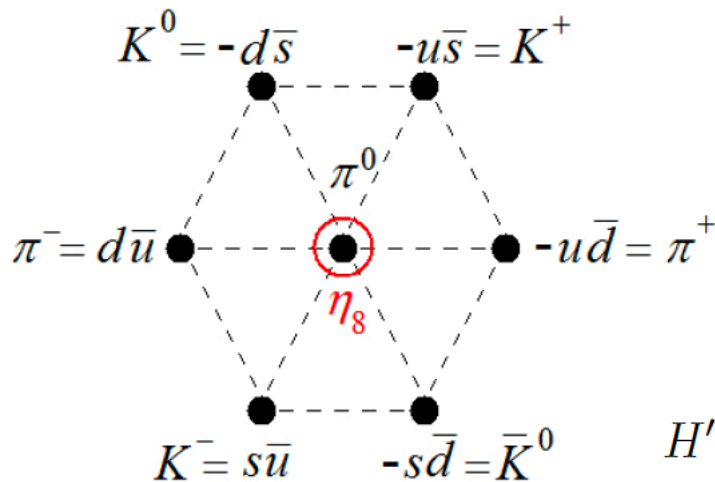
Symetria SU(3) zakłada, że wszystkie kwarki mają te same masy, więc mezony w oktecie są zdegenerowane. Cząstka singletowa ma inną masę.



Jednak kwark s jest cięższy (90 MeV)  
od kwarków u oraz d (2 oraz 5 MeV)  
SU(3) złamane, izospin SU(2) - nie

# Model kwarków – - mezony pseudoskalarne

Symetria SU(3) zakłada, że wszystkie kwarki mają te same masy, więc mezony w okolicy są zdegenerowane. Cząstka singletowa ma inną masę.



Jednak kwark s jest cięższy (90 MeV)  
od kwarków u oraz d (2 oraz 5 MeV)  
SU(3) złamane, izospin SU(2) - nie

Policzymy rozszczepienia w rachunku zaburzeń

$$H' \sim (m_s - m) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{(m_s - m)}{3} (1 - \sqrt{3}\lambda_8)$$

Jedynka nie powoduje rozszczepień.

# Rozszczepienia w oktecie

$$H' \sim O_8^{(8)}$$

nieprzywiedlny operator tensorowy

# Rozszczepienia w oktecie

$$H' \sim O_8^{(8)}$$

nieprzywiedlny operator tensorowy

## Przypomnienie z MK:

Operatory  $Q_{j,m}$ , gdzie  $m = -j, -j + 1, \dots, j$  są nieprzywiedlnymi (nieredukowalnymi) operatorami tensorowymi, jeżeli:

$$\begin{aligned} [J_{\pm}, Q_{j,m}] &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} Q_{j,m \pm 1}, \\ [J_3, Q_{j,m}] &= m Q_{j,m}, \end{aligned}$$



# Rozszczepienia w oktecie

$$H' \sim O_8^{(8)}$$

nieprzywiedlny operator tensorowy

## Przypomnienie z MK:

Operatory  $Q_{j,m}$ , gdzie  $m = -j, -j + 1, \dots, j$  są nieprzywiedlnymi (nieredukowalnymi) operatorami tensorowymi, jeżeli:

$$\begin{aligned} [J_{\pm}, Q_{j,m}] &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} Q_{j,m \pm 1}, \\ [J_3, Q_{j,m}] &= m Q_{j,m}, \end{aligned}$$

Generatory spełniają te reguły komutacji – stanowią nred. op. o spinie 1

$$J_3 \sim Q_{1,0}, \quad J_{\pm} \sim Q_{1,\pm 1},$$

# Rozszczepienia w oktecie

$H' \sim O_8^{(8)}$       nieprzywiedlny operator tensorowy

## Przypomnienie z MK:

Operatory  $Q_{j,m}$ , gdzie  $m = -j, -j + 1, \dots, j$  są nieprzywiedlnymi (nieredukowalnymi) operatorami tensorowymi, jeżeli:

$$\begin{aligned} [J_{\pm}, Q_{j,m}] &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} Q_{j,m \pm 1}, \\ [J_3, Q_{j,m}] &= m Q_{j,m}, \end{aligned}$$

Generatory spełniają te reguły komutacji – stanowią nred. op. o spinie 1

$$J_3 \sim Q_{1,0}, \quad J_{\pm} \sim Q_{1,\pm 1},$$

Zatem  $\lambda_8$  jest nieredukowalnym oktetowym op. tensorowym o indeksie 8

# Twierdzenie Eckarta-Wignera

$$\langle j, m | Q_{m_1, j_1} | j_2, m_2 \rangle = \mathcal{N}_Q(j, j_1, j_2) \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right)$$

stała normalizacyjna    współczynnik C-G zależny  
niezależna od  $m, m_{1,2}$     od  $m, m_{1,2}$

# Reprezentacja dołączona – c.d.

Dla reprezentacji dołączonej grupy  $SU(N)$  używamy dwie bazy:

- baza "naturalna"  $(T_l^{\text{adj}})_{mn} = -i f_{lmn}$ , gdzie stany są numerowane  $1, 2, \dots, N^2 - 1$
- baza "fizyczna" gdzie  $R$  generatorów ma postać diagonalną

# Reprezentacja dołączona – c.d.

Dla reprezentacji dołączonej grupy  $SU(N)$  używamy dwie bazy:

- baza "naturalna"  $(T_l^{\text{adj}})_{mn} = -i f_{lmn}$ , gdzie stany są numerowane  $1, 2, \dots, N^2 - 1$

- baza "fizyczna" gdzie  $R$  generatorów ma postać diagonalną

$$SU(2) \quad T^1 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^2 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^3 = i \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

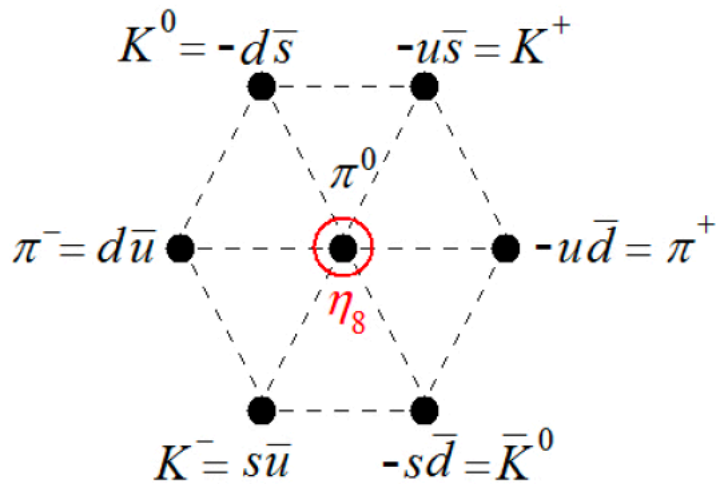
$$J^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad J^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Transformacja bazy:

$$\begin{aligned} |1, +1\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i |2\rangle), \\ |1, 0\rangle &= |3\rangle, \\ |1, -1\rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - i |2\rangle). \end{aligned}$$

# Reprezentacja dołączona w SU(3)

Transformacja



$$|8, 1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|4\rangle + i |5\rangle),$$

$$|8, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|6\rangle + i |7\rangle),$$

$$|8, 0, 1, +1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i |2\rangle),$$

$$|8, 0, 1, 0\rangle = |3\rangle,$$

$$|8, 0, 1, -1\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - i |2\rangle),$$

$$|8, -1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|6\rangle - i |7\rangle),$$

$$|8, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = +\frac{1}{\sqrt{2}} (|4\rangle - i |5\rangle),$$

$$|8, 0, 0, 0\rangle = |8\rangle.$$


---

# Tw. Eckarta-Wignera dla SU(3)

$$\langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(\mathbf{8})} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle$$

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}_1 \oplus \mathbf{8}_2 \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{27}$$

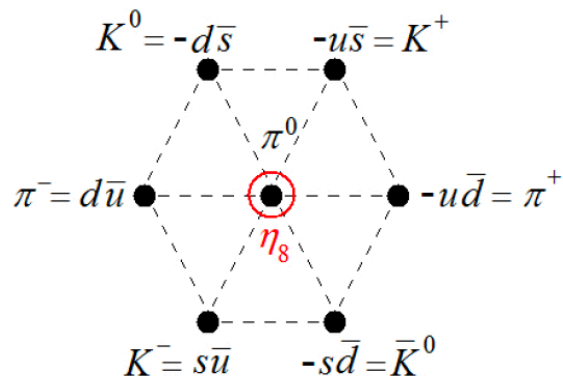
# Tw. Eckarta-Wignera dla SU(3)

$$\langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(\mathbf{8})} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle$$

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}_1 \oplus \mathbf{8}_2 \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{27}$$

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(\mathbf{8})} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle &= \alpha_1 \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}_1 \\ 0, 0, 0 & Y, I, I_3 & Y, I, I_3 \end{array} \right) \\ &+ \alpha_2 \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}_2 \\ 0, 0, 0 & Y, I, I_3 & Y, I, I_3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ponieważ  $|(\mathbf{8}) \mathbf{8}\rangle = |(\mathbf{8}) 0, 0, 0\rangle$  jest singletem izospinowym, współczynniki Clebscha-Gordana nie zależą od  $I_3$



	$\mathbf{8}_1$	$\mathbf{8}_2$
$K$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$
$\pi$	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\eta$	0	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\bar{K}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$



# Poprawki do mas mezonów

$$\langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(\mathbf{8})} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle = a' + bY + c \left[ I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right]$$

gdzie stałe  $a'$ ,  $b$  oraz  $c$  są pewnymi kombinacjami stałych  $\alpha_{1,2}$

# Poprawki do mas mezonów

$$\langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(\mathbf{8})} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle = a' + bY + c \left[ I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right]$$

gdzie stałe  $a'$ ,  $b$  oraz  $c$  są pewnymi kombinacjami stałych  $\alpha_{1,2}$

Ponieważ masa cząstki skalarnej występuje w Lagrangianie w kwadracie, ta poprawka daje wzór na  $M^2$ . Są też inne argumenty, że

$$M^2 \sim B_0 \sum_q m_q$$

# Poprawki do mas mezonów

$$\langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(\mathbf{8})} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle = a' + bY + c \left[ I(I + 1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]$$

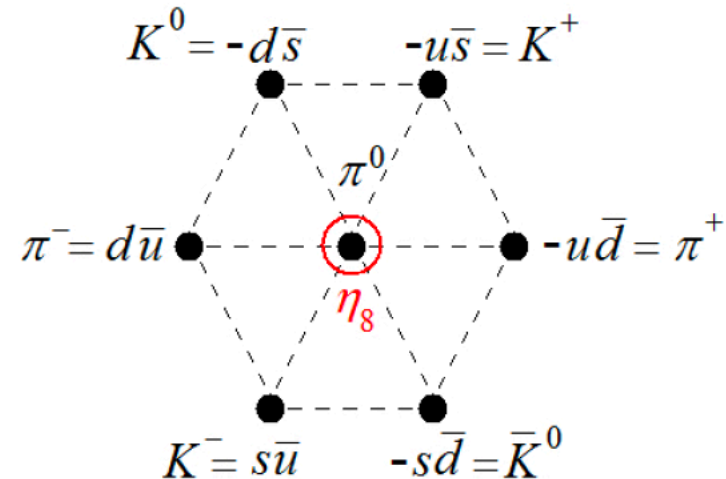
gdzie stałe  $a'$ ,  $b$  oraz  $c$  są pewnymi kombinacjami stałych  $\alpha_{1,2}$

Ponieważ masa cząstki skalarnej występuje w Lagrangianie w kwadracie, ta poprawka daje wzór na  $M^2$ . Są też inne argumenty, że

$$M^2 \sim B_0 \sum_{\tilde{q}} m_q$$

Zatem: 
$$M^2 = a + bY + c \left[ I(I + 1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]$$

stała  $a$  zawiera stałą  $a'$  plus przyczynek od operatora jednostkowego



# Poprawki do mas mezonów

$$\langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(\mathbf{8})} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle = a' + bY + c \left[ I(I + 1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]$$

gdzie stałe  $a'$ ,  $b$  oraz  $c$  są pewnymi kombinacjami stałych  $\alpha_{1,2}$

Ponieważ masa cząstki skalarnej występuje w Lagrangianie w kwadracie, ta poprawka daje wzór na  $M^2$ . Są też inne argumenty, że

$$M^2 \sim B_0 \sum_{\tilde{q}} m_q$$

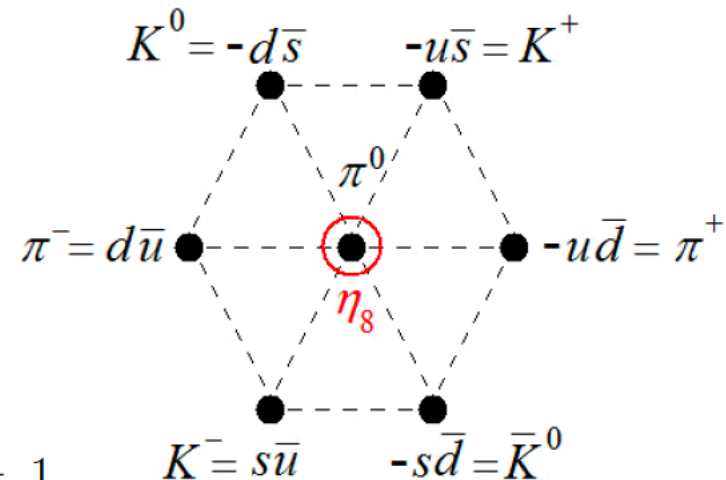
Zatem: 
$$M^2 = a + bY + c \left[ I(I + 1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]$$

stała  $a$  zawiera stałą  $a'$  plus przyczynek

od operatora jednostkowego

stany o  $Y = -1$  są antycząstkami stanów  $Y = 1$

dla mezonów  $b = 0$



# Poprawki do mas mezonów

$$M_K^2 = a + \frac{1}{2}c,$$

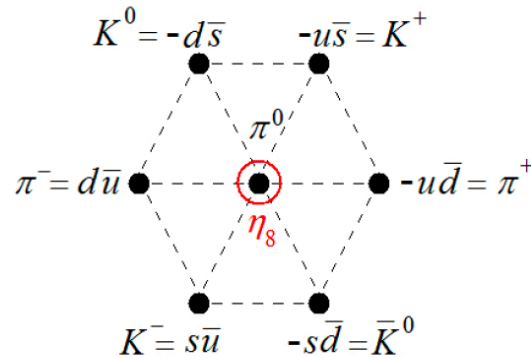
$$M_\pi^2 = a + 2c,$$

$$M_{\eta_8}^2 = a,$$

Trzy masy, dwie stałe:

Gell-Mann, Okubo

$$4M_K^2 = M_\pi^2 + 3M_{\eta_8}^2.$$

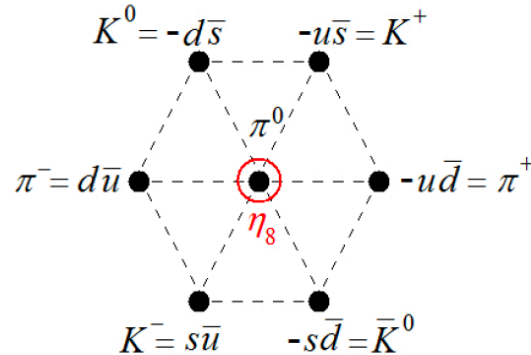


# Poprawki do mas mezonów

$$M_K^2 = a + \frac{1}{2}c,$$

$$M_\pi^2 = a + 2c,$$

$$M_{\eta_8}^2 = a,$$



Trzy masy, dwie stałe:

Gell-Mann, Okubo

$$4M_K^2 = M_\pi^2 + 3M_{\eta'}^2.$$

Dane doświadczalne: [https://pdg.lbl.gov/2020/tables/contents\\_tables.html](https://pdg.lbl.gov/2020/tables/contents_tables.html)

$\pi^\pm$

$$m = 139.57039 \pm 0.00018 \text{ MeV}$$

$\pi^0$

$$m = 134.9768 \pm 0.0005 \text{ MeV}$$

$\eta$

$$m = 547.862 \pm 0.017 \text{ MeV}$$

$\eta'(958)$

$$m = 957.78 \pm 0.06 \text{ MeV}$$

$K^\pm$

$$m = 493.677 \pm 0.016 \text{ MeV}$$

$K^0$

$$m = 497.611 \pm 0.013 \text{ MeV}$$

# GMO dla mezonów pseudoskalarnych

$$4M_K^2 = M_\pi^2 + 3M_\eta^2$$

$$\begin{aligned} 4 \times (495.64)^2 &= (138.04)^2 + 3 \times (547.86)^2 \\ 982\,652 &= 919\,513 \end{aligned}$$

Dokładność 6-7%

# Mezony wektorowe

Spiny kwarków mogą się złożyć na całkowity spin 1

$I = 1$	$I = \frac{1}{2}$	$I = 0$	$I = 0$
$\rho(770)$	$K^*(892)$	$\omega(782)$	$\phi(1020)$



# Mezony wektorowe

Spiny kwarków mogą się złożyć na całkowity spin 1

$I = 1$	$I = \frac{1}{2}$	$I = 0$	$I = 0$
$\rho(770)$	$K^*(892)$	$\omega(782)$	$\phi(1020)$

Dla mezonów wektorowych relacja GMO daje:



$$\frac{4M_{K^*}^2 - M_{\rho}^2}{3} = M_{\omega}^2 \quad \Rightarrow \quad M_{\omega} = 927 \text{ MeV}$$

# Mezony wektorowe

Spiny kwarków mogą się złożyć na całkowity spin 1

$I = 1$	$I = \frac{1}{2}$	$I = 0$	$I = 0$
$\rho(770)$	$K^*(892)$	$\omega(782)$	$\phi(1020)$

Dla mezonów wektorowych relacja GMO daje:

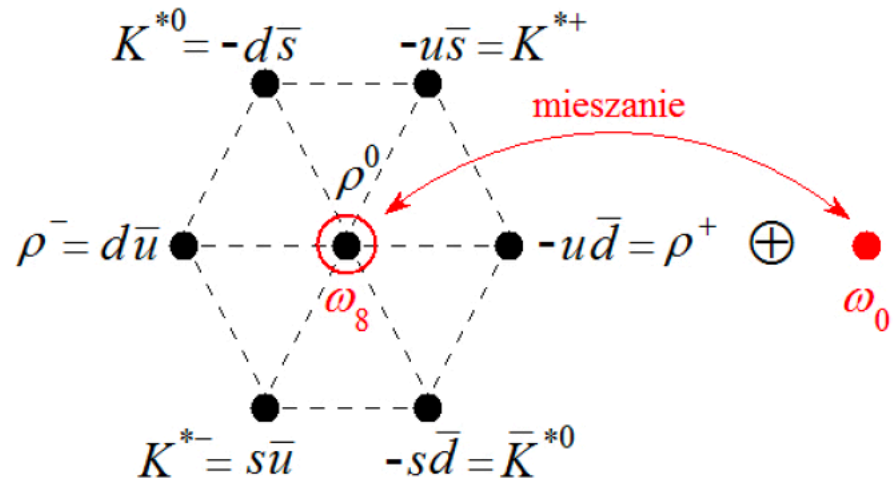


$$\frac{4M_{K^*}^2 - M_\rho^2}{3} = M_\omega^2 \quad \Rightarrow \quad M_\omega = 927 \text{ MeV}$$

SU(3) jest złamane, izospin nie. Stany z różnych reprezentacji SU(3) o tym samym izospinie i  $I_3$  mogą się mieszać. Stan  $\omega_8$  spełnia GMO, ale nie jest to stan fizyczny

$$|\omega\rangle = \cos\theta |\omega_8\rangle - \sin\theta |\omega_0\rangle$$

$$|\phi\rangle = \sin\theta |\omega_8\rangle + \cos\theta |\omega_0\rangle$$



# Mieszanie omega - phi

Macierz mas: 
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_8^2 & V_{80}^2 \\ V_{08}^2 & M_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\omega^2 & 0 \\ 0 & M_\phi^2 \end{bmatrix}$$

Łamanie symetrii SU(3):  $V_{08} = V_{80} \neq 0$

# Mieszanie omega - phi

Macierz mas: 
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_8^2 & V_{80}^2 \\ V_{08}^2 & M_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\omega^2 & 0 \\ 0 & M_\phi^2 \end{bmatrix}$$

Łamanie symetrii SU(3):  $V_{08} = V_{80} \neq 0$

Odwracając relację mieszania:

$$\begin{bmatrix} M_8^2 & V_{80}^2 \\ V_{08}^2 & M_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\omega^2 \cos^2 \theta + M_\phi^2 \sin^2 \theta & (M_\phi^2 - M_\omega^2) \sin \theta \cos \theta \\ (M_\phi^2 - M_\omega^2) \sin \theta \cos \theta & M_\phi^2 \cos^2 \theta + M_\omega^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

dostajemy:

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{M_8^2 - M_\omega^2}{M_\phi^2 - M_\omega^2}} = \pm 0.76$$

# Mieszanie omega - phi

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{M_8^2 - M_\omega^2}{M_\phi^2 - M_\omega^2}} = \pm 0.76$$

Stany fizyczne:

$$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \cos \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) - \sqrt{2} \sin \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \right]$$
$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \sin \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) + \sqrt{2} \cos \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \right]$$

# Mieszanie omega - phi

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{M_8^2 - M_\omega^2}{M_\phi^2 - M_\omega^2}} = \pm 0.76$$

Stany fizyczne:

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \cos \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) - \sqrt{2} \sin \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \right] \\ |\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \sin \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) + \sqrt{2} \cos \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \right] \end{aligned}$$

Gdyby zaszło:

$$\sin \theta = -\sqrt{2} \cos \theta \rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0.81$$

to

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \\ |\phi\rangle &= |s\bar{s}\rangle. \end{aligned}$$

# Mieszanie omega - phi

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{M_8^2 - M_\omega^2}{M_\phi^2 - M_\omega^2}} = \pm 0.76$$

Stany fizyczne:

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \cos \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) - \sqrt{2} \sin \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \right] \\ |\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \sin \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) + \sqrt{2} \cos \theta (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \right] \end{aligned}$$

Gdyby zaszło:

$$\sin \theta = -\sqrt{2} \cos \theta \rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0.81$$

to

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \\ |\phi\rangle &= |s\bar{s}\rangle. \end{aligned}$$

Mezony wektorowe (prawie) diagonalizują dziwność