Wstęp do fizyki cząstek

wykład 2

8.3.2021

Globalna symetria mnożenia przez fazę

Zarówno teoria skalarnego pola zespolonego

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

jak i teoria pola spinorowego

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) \qquad\qquad \overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

są niezmiennicze ze względu na *globalną* transformację:

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = e^{-i\theta}\Phi(x)$$
$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\theta}\psi(x)$$

Niezmienniczośc ze względu na *lokalną* transformację $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\theta(x)}\psi(x)$ załamuje się z powodu pochodnej.

Rozumowanie jest identyczne dla pola skalrnego i fermionowego. Zilustrujemy go na przykładzie pola fermionowego (spinorowego).

Lokalna symetria cechowania

Musimy "przeciągnąć" fazę przez pochodną $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\theta(x)}\psi(x)$

$$\partial_\mu \psi'(x) = e^{-i\theta(x)}\Big(\partial_\mu - i(\partial_\mu \theta(x))\Big)\,\psi(x)$$

Pojawia się nowy człon: pochodna fazy. Aby gęstość Lagrange'a była niezmiennicza wprowadzamy pochodną kowariantną, czyli czteropotencjał $A^\mu(x)$

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

gdzie q jest pewną stałą (jak się okaże ładunkiem pola ψ).

Lokalna symetria cechowania

Musimy "przeciągnąć" fazę przez pochodną $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\theta(x)}\psi(x)$

$$\partial_\mu \psi'(x) = e^{-i\theta(x)} \Big(\partial_\mu - i(\partial_\mu \theta(x)) \Big) \psi(x)$$

Pojawia się nowy człon: pochodna fazy. Aby gęstość Lagrange'a była niezmiennicza wprowadzamy pochodną kowariantną, czyli czteropotencjał $A^\mu(x)$

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

gdzie q jest pewną stałą (jak się okaże ładunkiem pola ψ). Wówczas

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi'(x) &= \left(\partial_\mu + iqA'_\mu\right) e^{-i\theta(x)} \psi(x) \\ &= e^{-i\theta(x)} \big(\partial_\mu \underbrace{- i\partial_\mu \theta(x) + iqA'_\mu}_{= iq\, A_\mu}\big) \psi(x) \\ &= e^{-i\theta(x)} D_\mu \psi(x). \end{aligned}$$

gwarantuje niezmienniczość $\mathcal{L}$

Niezmienniczość jest zapewniona, jeżeli $A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu \theta(x)$

a to jest już znana nam z elektrodynamiki transformacja cechowania.

Lokalna symetria cechowania

Przepiszmy $$D'_\mu \psi'(x) = e^{-i\theta(x)} D_\mu \psi(x) = e^{-i\theta(x)} D_\mu e^{i\theta(x)} \psi'(x)$$

$$\psi'(x) = e^{-i\theta(x)} \psi(x)$$

Stąd: $$\boxed{D'_\mu = e^{-i\theta(x)} D_\mu e^{i\theta(x)}}$$

Lokalna symetria cechowania

Przepiszmy $$D'_\mu \psi'(x) = e^{-i\theta(x)} D_\mu \psi(x) = e^{-i\theta(x)} D_\mu e^{i\theta(x)} \psi'(x)$$

$$\psi'(x) = e^{-i\theta(x)} \psi(x)$$

Stąd: $$\boxed{D'_\mu = e^{-i\theta(x)} D_\mu e^{i\theta(x)}}$$

Zastąpienie zwykłej pochodnej pochodną kowariantną generuje nowy człon, który nazywamy lagrangianem oddziaływania:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = -q\,\overline{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)\, A_\mu(x)$$

czyli mamy jawną postać prądu:

$$j^\mu = q\,\overline{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)$$

q – stała sprzężenia.

Lokalna symetria cechowania

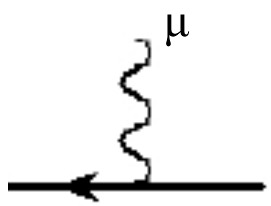
Przepiszmy $$D'_\mu \psi'(x) = e^{-i\theta(x)} D_\mu \psi(x) = e^{-i\theta(x)} D_\mu e^{i\theta(x)} \psi'(x)$$

$$\psi'(x) = e^{-i\theta(x)} \psi(x)$$

Stąd: $$\boxed{D'_\mu = e^{-i\theta(x)} D_\mu e^{i\theta(x)}}$$

Zastąpienie zwykłej pochodnej pochodną kowariantną generuje nowy człon, który nazywamy lagrangianem oddziaływania:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = -q\,\overline{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)\, A_\mu(x)$$



czyli mamy jawną postać prądu:

$$j^\mu = q\,\overline{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)$$

q – stała sprzężenia. Odziaływanie ilustrujemy graficznie (diagram Feynmana – tu czas płynie na lewo)

W teorii pola oddziaływanie (elektromagnetyczne) wprowadzamy narzucając wymóg niezmienniczości ze względu na lokalną symetrię cechowania opartą o grupę U(1) - mnożenie przez fazę.

Zwykła pochodna jest zastąpiona pochodną kowariantną, która zawiera pole $A^\mu(x)$. Pojawia się sprzężenie fotonu do pól materii.

Taką teorię trzeba uzupełnić o lagrangian dla pola elektromagnetycznego: $-\frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$

W teorii pola oddziaływanie (elektromagnetyczne) wprowadzamy narzucając wymóg niezmienniczości ze względu na lokalną symetrię cechowania opartą o grupę U(1) - mnożenie przez fazę.

Zwykła pochodna jest zastąpiona pochodną kowariantną, która zawiera pole $A^\mu(x)$. Pojawia się sprzężenie fotonu do pól materii.

Taką teorię trzeba uzupełnić o lagrangian dla pola elektromagnetycznego: $-\frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$

Ten schemat można uogólnić na przypadek nieabelowej grupy SU(*N*)

Grupa SU(N)

Grupy SU(2) oraz SU(3) pojawiają się w fizyce cząstek jako grupy lokalnej symetrii cechowania, ale też jako grupy globalnych symetrii wiążących się z klasyfukacją cząstek.

Macierz SU(N) to N wymiarowa macierz U o wyznacznkiu równym 1 (specjalna) i unitarna

$$U^{\dagger}U = 1$$

Grupa SU(N)

Grupy SU(2) oraz SU(3) pojawiają się w fizyce cząstek jako grupy lokalnej symetrii cechowania, ale też jako grupy globalnych symetrii wiążących się z klasyfukacją cząstek.

Macierz SU(N) to N wymiarowa macierz U o wyznacznkiu równym 1 (specjalna) i unitarna

$$U^{\dagger}U = 1$$

Zapiszmy macierz U jako macierz składającą się z N kolumn, z których kazda ma N elementów

$$U = \left[\left[\vec{u}_1 \right] \cdots \left[\vec{u}_N \right] \right]$$

$$U = \left[\begin{bmatrix} \\ \vec{u}_1 \\ \\ \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \\ \vec{u}_N \\ \\ \end{bmatrix}\right]$$

Grupa SU(N)

Warunek unitarności:

$$\begin{bmatrix} [& \vec{u}_1^\dagger &] \\ & \cdots & \\ [& \vec{u}_N^\dagger &] \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \\ \vec{u}_1 \\ \\ \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \\ \vec{u}_N \\ \\ \end{bmatrix}\right] = 1$$

daje N^2 równań zespolonych

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_1 &= 1,\ \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_2 = 0,\ \ldots\ \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_N = 0, \\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_1 &= 0,\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_2 = 1,\ \ldots\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_N = 0, \\ &\vdots \\ \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_1 &= 0,\ \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_2 = 0,\ \ldots\ \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_N = 1 \end{aligned}$$

$$U = \Big[\big[\, \vec{u}_1 \,\big] \; \cdots \; \big[\, \vec{u}_N \,\big] \Big]$$

Grupa SU(N)

Warunek unitarności:

$$\begin{bmatrix} [\quad \vec{u}_1^\dagger \quad] \\ \cdots \\ [\quad \vec{u}_N^\dagger \quad] \end{bmatrix} \Big[\big[\, \vec{u}_1 \,\big] \; \cdots \; \big[\, \vec{u}_N \,\big] \Big] = 1$$

daje N^2 równań zespolonych

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_1 &= 1, \; \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_2 = 0, \; \ldots \; \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_N = 0, \\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_1 &= 0, \; \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_2 = 1, \; \ldots \; \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_N = 0, \\ &\vdots \\ \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_1 &= 0, \; \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_2 = 0, \; \ldots \; \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_N = 1 \end{aligned}$$

Równania pod i nad przekątną są sprzężone.
Niezależnych równań nad diagonalną jest $(N^2 - N)/2$ i na diagonalnej N

$$U = \left[\left[\vec{u}_1 \right] \cdots \left[\vec{u}_N \right] \right]$$

Grupa SU(N)

Warunek unitarności:

$$\begin{bmatrix} [& \vec{u}_1^\dagger &] \\ & \cdots & \\ [& \vec{u}_N^\dagger &] \end{bmatrix} \left[\left[\vec{u}_1 \right] \cdots \left[\vec{u}_N \right] \right] = 1$$

daje N^2 równań zespolonych

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_1 &= 1,\ \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_2 = 0,\ \ldots\ \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_N = 0, \\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_1 &= 0,\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_2 = 1,\ \ldots\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_N = 0, \\ &\ \vdots \\ \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_1 &= 0,\ \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_2 = 0,\ \ldots\ \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_N = 1 \end{aligned}$$

Równania pod i nad przekątną są sprzężone.
Niezależnych równań nad diagonalną jest $(N^2 - N)/2$ i na diagonalnej N

Równania na diagonalnej są rzeczywiste, więc dają N warunków rzeczywistych, równania nad diagonalną dają $N^2 - N$ warunków rzeczywistych. W sumie mamy N^2 warunków rzeczywistych.

$$U = \left[\left[\ \vec{u}_1\ \right]\ \cdots\ \left[\ \vec{u}_N\ \right]\right]$$

Grupa SU(*N*)

Warunek unitarności:

$$\begin{bmatrix} [\quad \vec{u}_1^\dagger \quad] \\ \cdots \\ [\quad \vec{u}_N^\dagger \quad] \end{bmatrix} \left[\left[\ \vec{u}_1\ \right]\ \cdots\ \left[\ \vec{u}_N\ \right]\right] = 1$$

daje N^2 równań zespolonych

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_1 &= 1,\ \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_2 = 0,\ \ldots\ \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_N = 0, \\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_1 &= 0,\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_2 = 1,\ \ldots\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_N = 0, \\ &\vdots \\ \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_1 &= 0,\ \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_2 = 0,\ \ldots\ \vec{u}_N^\dagger \vec{u}_N = 1 \end{aligned}$$

Równania pod i nad przekątną są sprzężone.
Niezależnych równań nad diagonalną jest $(N^2 - N)/2$ i na diagonalnej N

Równania na diagonalnej są rzeczywiste, więc dają N warunków rzeczywistych, równania nad diagonalną dają $N^2 - N$ warunków rzeczywistych. W sumie mamy N^2 warunków rzeczywistych.

Zauważmy, że warunek $U^\dagger U = 1$ gwarantuje, że $|\det U| = 1$. Zatem warunek $\det U = 1$ daje dodatkowo tylo jeden warunek rzeczywisty (określa fazę)

Grupa SU(N)

Zatem na macierz zespoloną $N \times N$ o $2N^2$ parametrach rzeczywistych narzucamy $N^2 + 1$ warunków rzecywistych. Zostaje

$$2N^2 - (N^2 + 1) = N^2 - 1$$

parametrów rzeczywistych.

Grupa SU(N)

Zatem na macierz zespoloną $N \times N$ o $2N^2$ parametrach rzeczywistych narzucamy N^2+1 warunków rzecywistych. Zostaje

$$2N^2 - (N^2+1) = N^2 - 1$$

parametrów rzeczywistych.

Dowolną macierz unitarną mozemy zapisać jako $U = e^{-iH}$ gdzie H jest hermitowską macierzą $N \times N$. Dodatkowo H jest bezśladowa, co wynika z tożsamości

$$\det U = \exp\left(\mathrm{Tr}\log U\right)$$

Grupa SU(N)

Zatem na macierz zespoloną $N \times N$ o $2N^2$ parametrach rzeczywistych narzucamy N^2+1 warunków rzecywistych. Zostaje

$$2N^2 - (N^2+1) = N^2 - 1$$

parametrów rzeczywistych.

Dowolną macierz unitarną mozemy zapisać jako $U = e^{-iH}$ gdzie H jest hermitowską macierzą $N \times N$. Dodatkowo H jest bezśladowa, co wynika z tożsamości

$$\det U = \exp\left(\mathrm{Tr}\log U\right)$$

Macierz H mozna sparametryzować przez N^2-1 parametrów rzeczywistych θ_n zebranych w wektor $\vec{\theta}$

$$H = \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta_n T_n = \vec{\theta}\cdot\vec{T}$$

gdzie N^2-1 bezśladowych macierzy T_n nazywa się generatorami grupy. Są one nizależne

$$\text{jeżeli } \vec{\theta}\cdot\vec{T} = 0 \text{ to } \vec{\theta} \equiv 0$$

z czego wynika (1/2 jest konwencją)

$$\mathrm{Tr}(T_m T_n) = \frac{1}{2}\delta_{mn}$$

Grupa SU(N)

Pomnóżmy

$$H = \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta_n T_n = \vec{\theta} \cdot \vec{T}$$

z lewej strony przez T_m i weźmy ślad:

$$\mathrm{Tr}\left(T_m \sum_n \theta_n T_n\right) = \frac{1}{2}\theta_m$$

Zatem, jeżeli $\vec{\theta} \cdot \vec{T} = 0$ to musi zajść $\vec{\theta} = 0$

Grupa SU(N)

Pomnóżmy

$$H = \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta_n T_n = \vec{\theta} \cdot \vec{T}$$

z lewej strony przez T_m i weźmy ślad:

$$\mathrm{Tr}\left(T_m \sum_n \theta_n T_n \right) = \frac{1}{2}\theta_m$$

Zatem, jeżeli $\vec{\theta} \cdot \vec{T} = 0$ to musi zajść $\vec{\theta} = 0$

Dla grupy SU(2) $T^i = \frac{1}{2}\tau^i$ (macierze Pauliego)

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Grupa SU(3)

Dla grupy SU(3) mamy 8 generatorów danych przez macierze Gell-Manna

$$\lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Genaratory grupy SU(N)

Generatory grupy SU(N) spełniają reguły komutacji

$$[T_a, T_b] = i\, f^c{}_{ab} T_c$$

gdzie f_{cab} są całkowicie antysymetrycznym stałymi, zwanymi stałymi struktury grupy.

Dla grupy SU(2) jest to tensor Levi-Civity.

Pola Yanga-Millsa, grupa SU(N)

Niech pole fermionowe składa się z N składowych (każda składowa jest bispinorem Diraka) i transformuje się poprzez *lokalną* transformację $\mathrm{SU}(N)$

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = U(x)\Psi(x)$$

Zamiast jednej fazy, mamy $N^2 - 1$ faz

$$U(x) = e^{-i\theta_m(x)T^m} \qquad\qquad (m = 1, 2, \ldots N^2 - 1)$$

Pola Yanga-Millsa, grupa SU(*N*)

Niech pole fermionowe składa się z N składowych (każda składowa jest bispinorem Diraka) i transformuje się poprzez *lokalną* transformację $\mathrm{SU}(N)$

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U(x)\Psi(x)$$

Zamiast jednej fazy, mamy $N^2 - 1$ faz

$$U(x) = e^{-i\theta_m(x)T^m} \qquad (m = 1, 2, \ldots N^2 - 1)$$

Definiujemy pochodną kowariantną

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^m A_\mu^m(x) = \partial_\mu + ig\boldsymbol{A}_\mu(x)$$

Aby funkcja Lagrange'a była niezmiennicza musi zajść (jak dla U(1))

$$D'_\mu = U(x)D_\mu U^\dagger(x)$$

Pola Yanga-Millsa, grupa SU(N)

Rozpiszmy $D'_\mu = U(x) D_\mu U^\dagger(x)$ $\qquad T^m A^m_\mu(x) = \boldsymbol{A}_\mu(x)$

pamiętając, że operator ∂_μ działa na domyślną funkcję próbną:

$$\begin{aligned} D'_\mu = \partial_\mu + ig\boldsymbol{A}'_\mu(x) &= U(x)\left(\partial_\mu + ig\boldsymbol{A}_\mu(x)\right)U^\dagger(x) \\ &= \partial_\mu + igU(x)\boldsymbol{A}_\mu(x)U^\dagger(x) + U(x)\partial_\mu U^\dagger(x). \end{aligned}$$

Stąd:

$$\boldsymbol{A}'_\mu(x) = U(x)\boldsymbol{A}_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

Pola Yanga-Millsa, grupa SU(N)

Rozpiszmy $D'_\mu = U(x) D_\mu U^\dagger(x)$ $\qquad T^m A^m_\mu(x) = \boldsymbol{A}_\mu(x)$

pamiętając, że operator ∂_μ działa na domyślą funkcję próbną:

$$D'_\mu = \partial_\mu + ig\boldsymbol{A}'_\mu(x) = U(x)\left(\partial_\mu + ig\boldsymbol{A}_\mu(x)\right)U^\dagger(x)$$
$$= \partial_\mu + igU(x)\boldsymbol{A}_\mu(x)U^\dagger(x) + U(x)\partial_\mu U^\dagger(x).$$

Stąd:

$$\boldsymbol{A}'_\mu(x) = U(x)\boldsymbol{A}_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

Różniczkując $U(x)U^\dagger(x) = 1$ mamy $U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) = -\left[\partial_\mu U(x)\right]U^\dagger(x)$

i w konsekwencii

$$\boldsymbol{A}'_\mu(x) = U(x)\boldsymbol{A}_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}\left[\partial_\mu U(x)\right]U^\dagger(x)$$

Funkcja Lagrange'a

Ponieważ pochodna kowariantna ma postać

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^m A_\mu^m(x)$$

oddziaływanie jest opisane prądem ("kolorowym" – indeks m)

$$j_\mu^m = g\,\overline{\Psi}(x)\gamma_\mu T^m \Psi(x)$$

Funkcja Lagrange'a

Ponieważ pochodna kowariantna ma postać

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^m A_\mu^m(x)$$

odziaływanie jest opisane prądem ("kolorowym" – indeks m)

$$j_\mu^m = g\,\overline{\Psi}(x)\gamma_\mu T^m \Psi(x)$$

Konstrukcja tensora pola. W elektrodynamice

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu + iqA_\mu, \partial_\nu + iqA_\nu] \\ &= iq\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) \\ &= iqF_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Zatem w teorii nieabelowej zdefiniujemy tensor pola przez analogię

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu]$$

Funkcja Lagrange'a

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu]\psi &= (\partial_\mu + ig\boldsymbol{A}_\mu)(\partial_\nu + ig\boldsymbol{A}_\nu)\psi - (\partial_\nu + ig\boldsymbol{A}_\nu)(\partial_\mu + ig\boldsymbol{A}_\mu)\psi \\ &= ig(\partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + ig[\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu])\psi,\end{aligned}$$

Stąd tensor pola w teorii nieabelowej zawiera oddziaływanie (fotony nie oddziaływały)

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = (\partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + ig[\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu])$$

Tensor pola transformuje się $\boldsymbol{F}'_{\mu\nu} = U(x)\boldsymbol{F}_{\mu\nu}U^\dagger(x)$

Niezmienniczy lagrangian

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}\sum_m F^m_{\mu\nu}F^{m\,\mu\nu}$$

W tym lagrangiane są oddziaływania trój-cząskowe i cztero-cząskowe.

Teoria oparta na grupie SU(3) nazywa się chromodynamiką kwantową (ang. *quantum chromodynamics*, QCD), a bozony pośredniczące ("fotony") nazywają się gluonami (ang. *glue* - klej). Pola fermionowe w QCD to kwarki. QCD odpowiada za oddziaływania silne, wiąże kwarki w cząstki fizyczne: mezony i bariony.

Siła oddziaływań rośnie z odległością (w elektrodynamice maleje) stąd nie mozna "wyrwać" swobodnych kwarków. Jest to wynikiem samoodziaływania gluonów.

Teoria oparta na grupie SU(3) nazywa się chromodynamiką kwantową (ang. *quantum chromodynamics*, QCD), a bozony pośredniczące ("fotony") nazywają się gluonami (ang. *glue* - klej). Pola fermionowe w QCD to kwarki. QCD odpowiada za oddziaływania silne, wiąże kwarki w cząstki fizyczne: mezony i bariony.

Siła oddziaływań rośnie z odległością (w elektrodynamice maleje) stąd nie mozna "wyrwać" swobodnych kwarków. Jest to wynikiem samoodziaływania gluonów. Uwięzienie (ang. *confinement*).

Teoria oparta na grupie SU(2) opisuje oddziaływania słabe.
Z doświadczenia wiadomo, że bozony pośredniczące w słabych oddziaływaniach mają masę. Stąd symetria cechowania jest złamana (Higgs). Dlatego nie ma uwięzienia i mamy swobodne leptony. Uwaga – teoria SU(2) miesza się z U(1) –
- oddziaływania elektosłabe.

Grupy

Przypomnienie pojęcia grupy: struktura algebraiczna + odwzorowanie

$$G \times G \ \ni \ (g_1, g_2) \longrightarrow g_1 \bullet g_2 = g \in G$$

np. macierze i mnożenie macierzowe.

1. Łączność: $(g_1 \bullet g_2) \bullet g_3 = g_1 \bullet (g_2 \bullet g_3)$
2. Element neutralny: $e \bullet g = g \bullet e = g$
3. Element odwrotny: $g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e$

Grupy

Przypomnienie pojęcia grupy: struktura algebraiczna + odwzorowanie

$$G \times G \ \ni \ (g_1, g_2) \longrightarrow g_1 \bullet g_2 = g \in G$$

np. macierze i mnożenie macierzowe.

1. Łączność: $(g_1 \bullet g_2) \bullet g_3 = g_1 \bullet (g_2 \bullet g_3)$
2. Element neutralny: $e \bullet g = g \bullet e = g$
3. Element odwrotny: $g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e$

Pojęcie reprezentacji: odwzorowanie (homomorficzne) $g \to D(g), \ g \in G$
gdzie $D(g)$ - odwracalne operatory liniowe na n wymiarowej przestrzeni wektorowej:

$$D(g_1 \bullet g_2) = D(g_1)D(g_2), \quad D(g^{-1}) = D^{-1}(g), \quad D(e) = 1$$

Grupy

Przypomnienie pojęcia grupy: struktura algebraiczna + odwzorowanie

$$G \times G \ \ni \ (g_1, g_2) \longrightarrow g_1 \bullet g_2 = g \in G$$

np. macierze i mnożenie macierzowe.

1. Łączność: $(g_1 \bullet g_2) \bullet g_3 = g_1 \bullet (g_2 \bullet g_3)$
2. Element neutralny: $e \bullet g = g \bullet e = g$
3. Element odwrotny: $g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e$

Pojęcie reprezentacji: odwzorowanie (homomorficzne) $g \to D(g), \ g \in G$
gdzie $D(g)$ - odwracalne operatory liniowe na n wymiarowej przestrzeni wektorowej:

$$D(g_1 \bullet g_2) = D(g_1)D(g_2), \quad D(g^{-1}) = D^{-1}(g), \quad D(e) = 1$$

W fizyce najczęściej definiujemy grupę poprzez pewną reprezentację macierzową.
Np. grupy SU(N) są zdefinowane poprzez unitarne macierze *N* x *N*.

Grupy

Załóżmy, że mamy dwie reprezentacje macierzowe: $D^{(1)}(g)$ oraz $D^{(2)}(g)$
Wówczas macierz

$$D(g) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{bmatrix}$$

jest także reprezentacją o wymiarze będącym sumą wymiarów reprezentacji (1) i (2).
Taką reprezentację nazywamy redukowalną $D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g)$

Grupy

Załóżmy, że mamy dwie reprezentacje macierzowe: $D^{(1)}(g)$ oraz $D^{(2)}(g)$
Wówczas macierz

$$D(g) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{bmatrix}$$

jest także reprezentacją o wymiarze będącym sumą wymiarów reprezentacji (1) i (2).
Taką reprezentację nazywamy redukowalną $D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g)$

Bardzo często spotykamy się w fizyce z reprezentacjami redukowalnymi, które nie mają prostej struktury quasi-diagonalnej: $D'(g) = SD(g)S^{-1}$
Wówczas należy przeprowadzić *redukcję* reprezentacji D', tzn. znaleźć macierz S.
czyli zmienić bazę. Przykład: składanie spinów, szereg Clebscha-Gordana.

Grupy

Załóżmy, że mamy dwie reprezentacje macierzowe: $D^{(1)}(g)$ oraz $D^{(2)}(g)$
Wówczas macierz

$$D(g) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{bmatrix}$$

jest także reprezentacją o wymiarze będącym sumą wymiarów reprezentacji (1) i (2).
Taką reprezentację nazywamy redukowalną $D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g)$

Bardzo często spotykamy się w fizyce z reprezentacjami redukowalnymi, które nie mają prostej struktury quasi-diagonalnej: $D'(g) = SD(g)S^{-1}$
Wówczas należy przeprowadzić *redukcję* reprezentacji D' , tzn. znaleźć macierz S.
czyli zmienić bazę. Przykład: składanie spinów, szereg Clebscha-Gordana.

Fizycy często używają określenia *reprezentacja* w odniesieniu do bazy a nie do macierzy.

Grupy SU(*N*)

Grupy SU(*N*) definiujemy poprzez podanie jawnej postaci generatorów T_m
w postaci *N*^{2} - 1 hermitowskich macierzy *N* x *N*. Wówczas

$$U = e^{-iH} \qquad H = \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta_n T_n = \vec{\theta} \cdot \vec{T}$$

Dla grupy SU(2) są to macierze Pauliego, dla SU(3) macierze Gell-Manna (podzielone przez 2). Macierze te spełniają reguły komutacji:

$$[T_m, T_n] = i f_{mnl} T_l$$

Całkowicie antysymetryczne stałe struktury f_{mnl} definiują grupę. Można je wyliczyć znając jawną postać generatorów T_m w dowolnej reprezentacji macierzowej. Typowo używa się do tego celu najniżej wymiarowej reprezentacji zwanej reprezentacją fundamentalną (definiującą).

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Równoważność unitarna

Jawna postać macierzy T_m zależy od wyboru bazy. Mcierze $T'_n = U^\dagger T_n U$ spełniają te same relacje komutacji. Jest to więc ta sama (unitarnie rónoważna) reprezentacja co T_m .

Równoważność unitarna

Jawna postać macierzy T_m zależy od wyboru bazy. Mcierze $T_n' = U^\dagger T_n U$ spełniają te same relacje komutacji. Jest to więc ta sama (unitarnie rónoważna) reprezentacja co T_m .

Sprzęgnijmy relację komutacji $[T_m, T_n] = i f_{mnl} T_l$ w sposób zespolony i pomnóżmy operatory T_m^* występujące w komutatorze przez -1:

$$[-T_m^*, -T_n^*] = i f_{mnl} \left(-T_l^*\right)$$

Pytanie: czy reprezentacja $T_n' = -T_n^*$ jest unitarnie równoważna T_n gdzie T_n jest reprezentacją fundamentalną?

Równoważność unitarna

Jawna postać macierzy T_m zależy od wyboru bazy. Mcierze $T'_n = U^\dagger T_n U$ spełniają te same relacje komutacji. Jest to więc ta sama (unitarnie rónoważna) reprezentacja co T_m .

Sprzęgnijmy relację komutacji $[T_m, T_n] = i f_{mnl} T_l$ w sposób zespolony i pomnóżmy operatory T^*_m występujące w komutatorze przez -1:

$$[-T^*_m, -T^*_n] = i f_{mnl} \left(-T^*_l\right)$$

Pytanie: czy reprezentacja $T'_n = -T^*_n$ jest unitarnie równoważna T_n gdzie T_n jest reprezentacją fundamentalną?

Odpowiedź: dla grupy SU(2) – TAK, dla grupy SU(N>2) – NIE
Zatem dla grup o N > 2 mamy *dwie* repreznatacje o wymiarze N , które nie są równoważne. Mamy zatem reprezentację fundamentalną i reprezentacją do niej sprzężoną.

Równoważność unitarna

Jawna postać macierzy T_m zależy od wyboru bazy. Mcierze $T'_n = U^\dagger T_n U$ spełniają te same relacje komutacji. Jest to więc ta sama (unitarnie rónoważna) reprezentacja co T_m .

Sprzęgnijmy relację komutacji $[T_m, T_n] = i f_{mnl} T_l$ w sposób zespolony i pomnóżmy operatory T_m^* występujące w komutatorze przez -1:

$$[-T_m^*, -T_n^*] = i f_{mnl} \, (-T_l^*)$$

Pytanie: czy reprezentacja $T'_n = -T_n^*$ jest unitarnie równoważna T_n gdzie T_n jest reprezentacją fundamentalną?

Odpowiedź: dla grupy SU(2) – TAK, dla grupy SU(*N*>2) – NIE
Zatem dla grup o *N* > 2 mamy *dwie* repreznatacje o wymiarze *N* , które nie są równoważne. Mamy zatem reprezentację fundamentalną i reprezentacją do niej sprzężoną.

$$\tau^i \, \tau^j = \delta^{ij} \, \mathbf{1} + i \, \epsilon^{ijk} \tau^k \qquad\qquad \lambda^i \lambda^j = \frac{2}{3} \, \delta^{ij} \mathbf{1} + i f^{\,ijk} \, \lambda^k + d^{\,ijk} \, \lambda^k$$

Równoważność unitarna

Jawna postać macierzy T_m zależy od wyboru bazy. Mcierze $T'_n = U^\dagger T_n U$ spełniają te same relacje komutacji. Jest to więc ta sama (unitarnie rónoważna) reprezentacja co T_m .

Sprzęgnijmy relację komutacji $[T_m, T_n] = i f_{mnl} T_l$ w sposób zespolony i pomnóżmy operatory T_m^* występujące w komutatorze przez -1:

$$[-T_m^*, -T_n^*] = i f_{mnl} \left(-T_l^*\right)$$

Pytanie: czy reprezentacja $T'_n = -T_n^*$ jest unitarnie równoważna T_n gdzie T_n jest reprezentacją fundamentalną?

Odpowiedź: dla grupy SU(2) – TAK, dla grupy SU(*N*>2) – NIE
Zatem dla grup o *N* > 2 mamy *dwie* reprezntacje o wymiarze *N* , które nie są równoważne. Mamy zatem reprezentację **fundamentalną** i reprezentację do niej **sprzężoną** (kwarki i antykwarki).

W przypadku wyżej wymiarowych reprezentacji T'_n mogą być rónoważne T_n

Reprezentacja dołączona

Tożsamość Jacobiego

$$[T_m,[T_n,T_l]]+[T_n,[T_l,T_m]]+[T_l,[T_m,T_n]]=0$$

Z t. Jacobiego wynika

$$f_{nlk}f_{kmr}+f_{lmk}f_{knr}+f_{mnk}f_{klr}=0$$

Zdefiniujmy (N^2-1) macierzy o wymiarze $(N^2-1)\times(N^2-1)$

$$\left(T_l^{\mathrm{adj}}\right)_{mn}=-i\,f_{lmn}$$

Macierze te spełniają relacje komutacji dla grupy SU(*N*), stanowią zatem (N^2-1) wymiarową reprezentację , która nazywa się reprezentacją *dołączoną* (*adjoint*).

Zauważmy:

$$-\,T_l^{\mathrm{adj}\,*}=T_l^{\mathrm{adj}}$$

Reprezentacja dołączona jest *samosprzężona.*

Reprezentacja dołączona

Macierze reprezentacji dołączonej działają na $(N^2 - 1)$ wymiarowe wektory

$$A = (a^1, \ldots, a^{N^2-1})$$

w następujący sposób (infinitenzymalnie):

$$A' = U^{\mathrm{adj}} A \;\rightarrow\; a'^m = a^m - \theta^l f_{lmn} a^n + \ldots$$

Reprezentacja dołączona

Macierze reprezentacji dołączonej działają na (N^2-1) wymiarowe wektory

$$A = (a^1, \ldots, a^{N^2-1})$$

w następujący sposób (infinitenzymalnie):

$$A' = U^{\mathrm{adj}} A \rightarrow a'^m = a^m - \theta^l f_{lmn} a^n + \ldots$$

Inna metoda: zdefiniujmy przy pomocy wektora A macierz (pole Yanga-Millsa!)

$$\boldsymbol{A} = \sum_{n=1}^{N^2-1} a^n T_n$$

i rozważmy transformację $\boldsymbol{A}' = U \boldsymbol{A} U^\dagger$

Infinitenzymalnie: $a'^m T_m = (1 - i\,\theta^n T_n + \ldots) a^m T_m (1 + i\,\theta^n T_n + \ldots)$

Reprezentacja dołączona

Macierze reprezentacji dołączonej działają na (N^2-1) wymiarowe wektory

$$A = (a^1, \ldots, a^{N^2-1})$$

w następujący sposób (infinitenzymalnie):

$$A' = U^{\mathrm{adj}} A \;\rightarrow\; a'^m = a^m - \theta^l f_{lmn} a^n + \ldots$$

Inna metoda: zdefiniujmy przy pomocy wektora A macierz (pole Yanga-Millsa!)

$$\boldsymbol{A} = \sum_{n=1}^{N^2-1} a^n T_n$$

i rozważmy transformację $\boldsymbol{A}' = U \boldsymbol{A} U^\dagger$

Infinitenzymalnie:

$$\begin{aligned} a'^m T_m &= (1 - i\,\theta^n T_n + \ldots) a^m T_m (1 + i\,\theta^n T_n + \ldots) \\ &= a^m T_m - i\,\theta^n \left[T_n, T_m\right] a^m \end{aligned}$$

Reprezentacja dołączona

Macierze reprezentacji dołączonej działają na (N^2-1) wymiarowe wektory

$$A = (a^1, \ldots, a^{N^2-1})$$

w następujący sposób (infinitenzymalnie):

$$A' = U^{\mathrm{adj}} A \;\rightarrow\; a'^m = a^m - \theta^l f_{lmn} a^n + \ldots$$

Inna metoda: zdefiniujmy przy pomocy wektora A macierz (pole Yanga-Millsa!)

$$\boldsymbol{A} = \sum_{n=1}^{N^2-1} a^n T_n$$

i rozważmy transformację $\boldsymbol{A}' = U\,\boldsymbol{A}\,U^\dagger$

Infinitenzymalnie:

$$\begin{aligned} a'^m T_m &= (1 - i\,\theta^n T_n + \ldots) a^m T_m (1 + i\,\theta^n T_n + \ldots) \\ &= a^m T_m - i\,\theta^n\,[T_n, T_m]\,a^m \\ &= a^m T_m + \theta^n\,f_{nmk} T_k\,a^m \end{aligned}$$

Reprezentacja dołączona

Macierze reprezentacji dołączonej działają na (N^2-1) wymiarowe wektory

$$A = (a^1, \ldots, a^{N^2-1})$$

w następujący sposób (infinitenzymalnie):

$$A' = U^{\mathrm{adj}} A \;\to\; a'^m = a^m - \theta^l f_{lmn} a^n + \ldots$$

Inna metoda: zdefiniujmy przy pomocy wektora A macierz (pole Yanga-Millsa!)

$$\boldsymbol{A} = \sum_{n=1}^{N^2-1} a^n T_n$$

i rozważmy transformację $\boldsymbol{A}' = U\,\boldsymbol{A}\,U^\dagger$

Infinitenzymalnie:

$$\begin{aligned} a'^m T_m &= (1 - i\,\theta^n T_n + \ldots) a^m T_m (1 + i\,\theta^n T_n + \ldots) \\ &= a^m T_m - i\,\theta^n \left[T_n, T_m\right] a^m \\ &= a^m T_m + \theta^n\, f_{nmk} T_k\, a^m \\ &= \left(a^m - \theta^l\, f_{lmn}\, a^n\right)\, T_m \end{aligned}$$

Reprezentacja dołączona

Macierze reprezentacji dołączonej działają na (N^2-1) wymiarowe wektory

$$A = (a^1, \ldots, a^{N^2-1})$$

w następujący sposób (infinitenzymalnie):

$$A' = U^{\mathrm{adj}} A \to a'^m = a^m - \theta^l f_{lmn} a^n + \ldots$$

Inna metoda: zdefiniujmy przy pomocy wektora A macierz (pole Yanga-Millsa!)

$$\boldsymbol{A} = \sum_{n=1}^{N^2-1} a^n T_n$$

i rozważmy transformację $\boldsymbol{A}' = U \boldsymbol{A} U^\dagger$

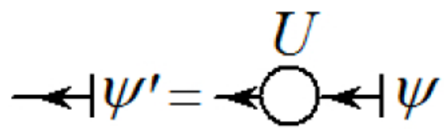
Infinitenzymalnie:

$$\begin{aligned} a'^m T_m &= (1 - i\,\theta^n T_n + \ldots) a^m T_m (1 + i\,\theta^n T_n + \ldots) \\ &= a^m T_m - i\,\theta^n\, [T_n, T_m]\, a^m \\ &= a^m T_m + \theta^n\, f_{nmk} T_k\, a^m \\ &= \left(a^m - \theta^l\, f_{lmn}\, a^n\right) T_m \end{aligned}$$

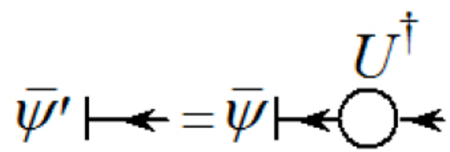
Metody graficzne

Metody graficzne (P. Cvitanović, *Group Theory, Birdtracks, Lie's and Exceptional Groups http://birdtracks.eu*) są bardzo efektywnym narzędziem do prowadzenia obliczeń na tensorach. Notacja

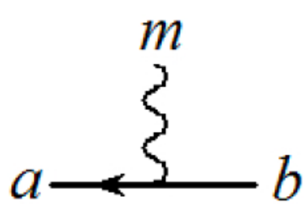
$$\Psi' = U\,\Psi$$



$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi}\,U^\dagger$$



Generatory:

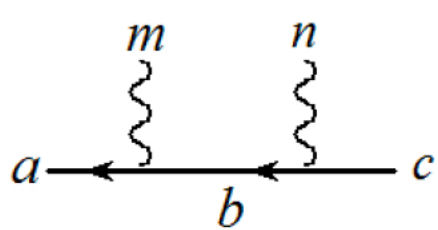


$$= T^m_{ab}$$

indeks rep. dołączonej

indeks rep. fundamentalnej

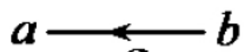
Mnożenie:



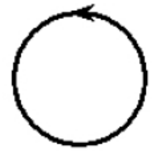
$$= T^m_{ab}\,T^n_{bc}$$

Metody graficzne

Przykłady zwężeń:

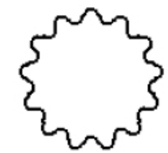


$= \delta_{ab}$



$= N$

$= \delta_{mn}$



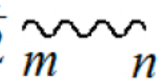
$= N^2 - 1$

Bezśladowość generatorów:

$= 0$

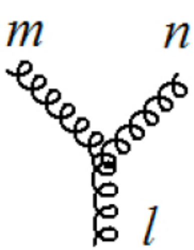
Normalizacja:

$= \frac{1}{2}$



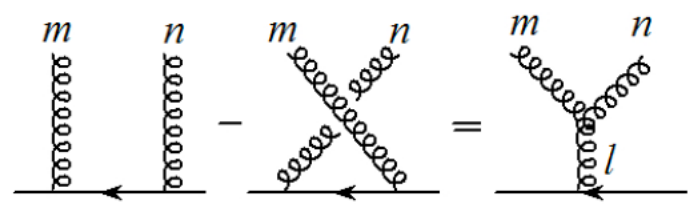
$$\mathrm{Tr}(T_m T_n) = \frac{1}{2}\delta_{mn}$$

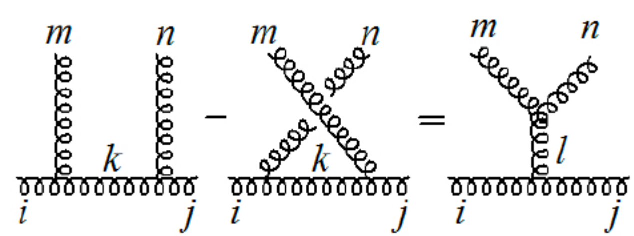
Stałe struktury:



$= if_{mnl} = -if_{nml}$

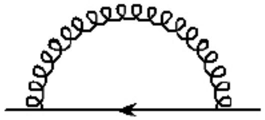
Reguły komutacji:





Przykład: op. Casimira dla rep. fundamentalnej

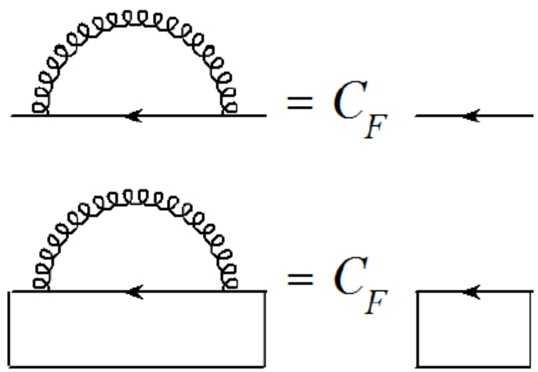
Definicja operatora Casimira:

$\Sigma_n (T^n)^2 =$  $= C_F$ 

Przykład: op. Casimira dla rep. fundamentalnej

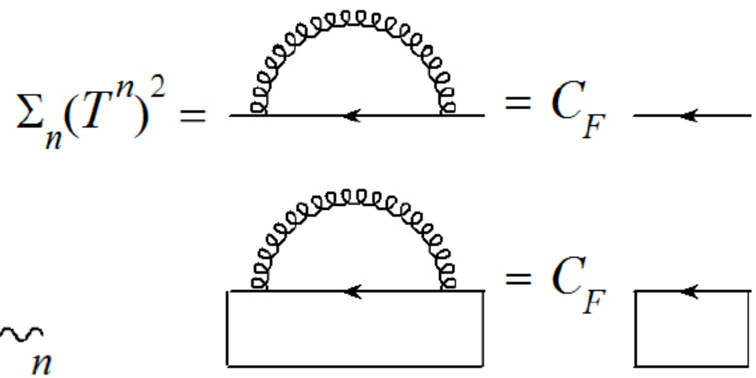
Definicja operatora Casimira:

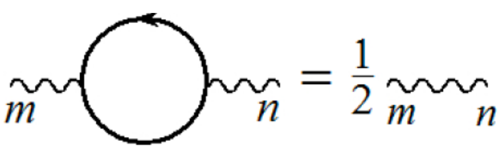
$\Sigma_n (T^n)^2 =$



Przykład: op. Casimira dla rep. fundamentalnej

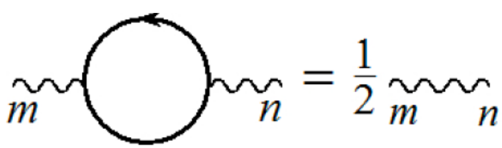
Definicja operatora Casimira:

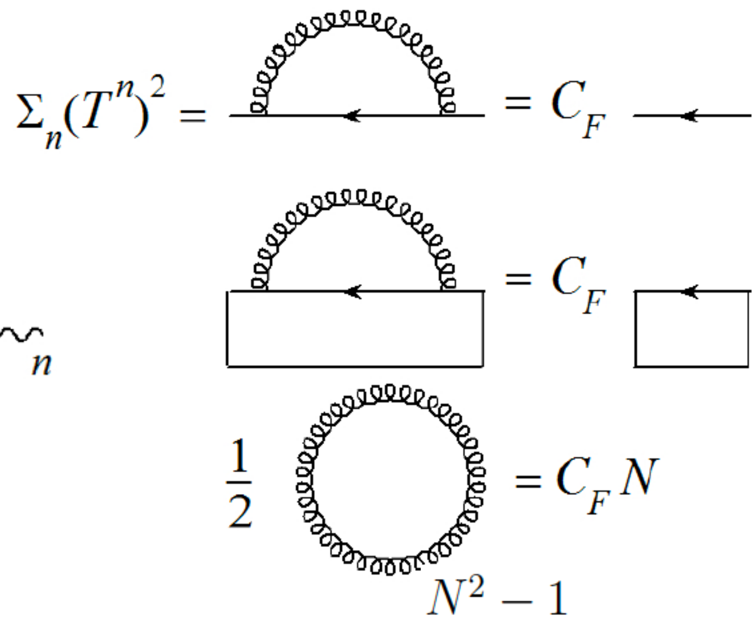




Przykład: op. Casimira dla rep. fundamentalnej

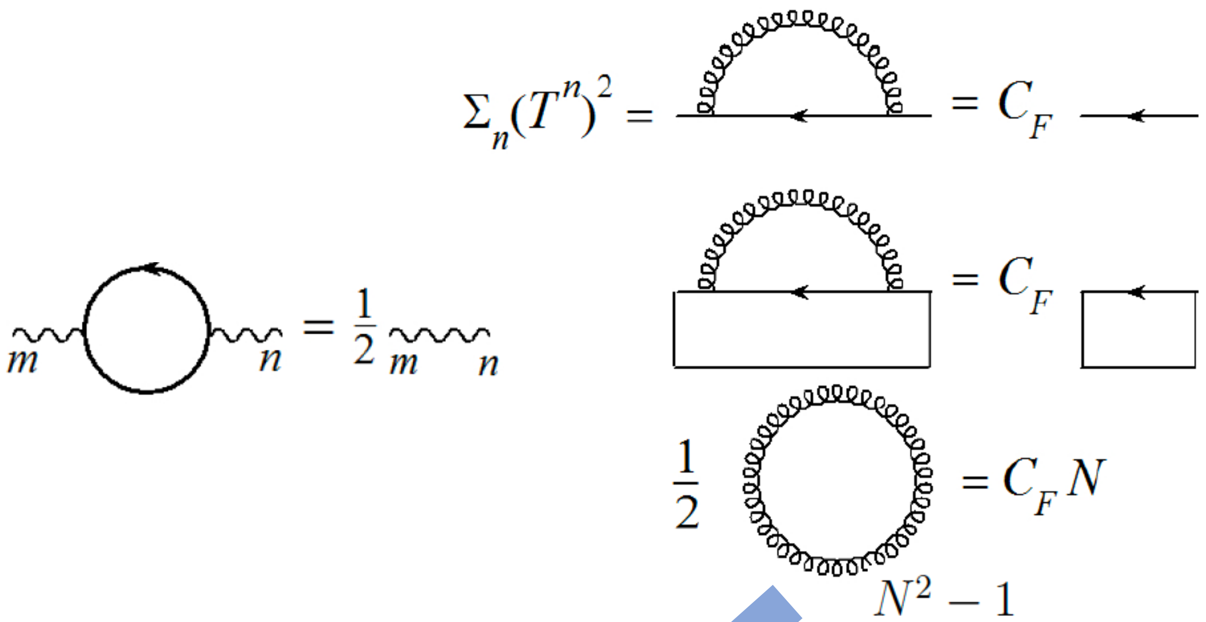
Definicja operatora Casimira:





Przykład: op. Casimira dla rep. fundamentalnej

Definicja operatora Casimira:



$$C_F = \frac{N^2-1}{2N} = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{dla} \quad \mathrm{SU}(2) \\ \frac{4}{3} & \text{dla} \quad \mathrm{SU}(3) \end{cases}$$