

# Wstęp do fizyki cząstek

wykład 1

1.3.2021

# Nierelatywistyczne równania falowe

Klasyczny związek między energią a pędem:  $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$

Swobodne równanie Schrödingera (nierelatywistyczne) - energię i pęd zastępujemy operatorami:

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \qquad \mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$$

Operatory te działają na funkcję falową

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi = 0$$

# Interpretacja

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi = 0$$

Od tego równania pomnożoneg przez  $-i\psi^*$  odejmijmy równanie sprzężone pomnożone przez  $-i\psi$

$$\begin{aligned}\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\frac{1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi &= 0 \\ -\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - i\frac{1}{2m}\psi\nabla^2\psi^* &= 0\end{aligned}$$

i dostajemy:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) - \frac{i}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*) = 0$$

Zauważmy:

$$\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^* = \nabla \cdot (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

Równanie ciągłości:  $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  gdzie:  $\rho = \psi^*\psi > 0$   $\mathbf{j} = -\frac{i}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$

# Interpretacja

$\rho = \psi^* \psi$  gęstość prawdopodobieństwa

$\mathbf{j} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$  gęstość prądu

Rów. ciągłości  $\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \rho = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = - \int_{\text{pow.} \rightarrow \infty} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{j} = 0$

implikuje, że prawdopodobieństwo jest zachowane.

# Fale płaskie

Rozwiązanie swobodnego równania Schrödingera – fale płaskie (idealizacja)

$$\psi_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}) = N e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

dają

$$\rho = |N|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{p}}{m} |N|^2 = \mathbf{v} |N|^2$$

czyli nie spełniają warunków znikania w nieskończoności.

Dwie metody obejścia tego problemu:

1) akceptujemy nieskończoności i normalizujemy funkcje falowe do delty Diraka

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} \quad N = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$

2) zamykamy układ w pudełku  $V = L^3$       wówczas  $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3)$

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \quad N^{\text{box}} = \frac{1}{\sqrt{V}} = \left[ \frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{1/2} N$$

# Równanie Kleina-Gordona

Relatywistyczny związek  $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$

zapisujemy jako:  $-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi$

Analogicznie, jak w równaniu Schrödingera mnożymy przez  $-i\phi^*$ , równanie sprzężone przez  $-i\phi$  i odejmujemy

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ i \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \nabla \cdot [-i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)] = 0$$

Jednak wielkość  $\rho$   nie jest doradnio określona – nie można jej zinterpretować jako gęstości prawdopodobieństwa.

Fale płaskie:  $\phi_p(t, \mathbf{x}) = N e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} = N e^{-ipx}$ ,  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$

wówczas:  $\rho = 2E |N|^2$ ,  $\mathbf{j} = 2\mathbf{p} |N|^2$

Jednakże energia może być ujemna (antycząstki). Normalizacja  $N = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E}}$

# Zasada najmniejszego działania

W mechanice klasycznej równania ruchu można otrzymać z zasady najmniejszego działania:

$$S = \int_0^T dt L(x, \dot{x})$$

Wówczas

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Podobnie równanie Kleina-Gordona można otrzymać z minimalizacji działania

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \quad \text{gęstość Lagrange'a}$$

Łatwo wykazać

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0$$

Gęstość Lagrange'a dla rzeczywistego pola skalaranego, z której wynika r. Kleina-Gordona:

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^2)$$

# Kwantowa teoria pola

Podobnie jak w MK, możemy skonstruować Hamiltonian. Najpierw uogólnony pęd

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)}$$

Transformacja Legendre'a (nie tylko dla pola skalarnego)

$$H = \pi \partial_t \varphi - \mathcal{L}$$

Pola występujące w hamiltonianie rozkładamy na fale płaskie. W  $t = 0$  dla K-G

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\xi_p} (a_p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})$$



# Kwantowa teoria pola

Podobnie jak w MK, możemy skonstruować Hamiltonian. Najpierw uogólnony pęd

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} = (\partial_t \varphi)$$

Transformacja Legendre'a (nie tylko dla pola skalarnego)

$$H = \pi \partial_t \varphi - \mathcal{L}$$

Pola występujące w hamiltonianie rozkładamy na fale płaskie. W  $t = 0$  dla K-G

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\xi_p} (a_p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad \pi(\mathbf{x}) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{\xi_p} (a_p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})$$

# Kwantowa teoria pola

Podobnie jak w MK, możemy skonstruować Hamiltonian. Najpierw uogólnony pęd

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} = (\partial_t \varphi)$$

Transformacja Legendre'a (nie tylko dla pola skalarnego)

$$H = \pi \partial_t \varphi - \mathcal{L}$$

Pola występujące w hamiltonianie rozkładamy na fale płaskie. W  $t = 0$  dla K-G

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\xi_p} (a_p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad \pi(\mathbf{x}) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{\xi_p} (a_p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})$$

Postulujemy:  $[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$

wtedy  $[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \lambda_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$

gdzie:  $\lambda_p = \frac{\xi_p^2}{2E_p}$

# Kwantowa teoria pola

Operatory  $a_p$  oraz  $a_q^\dagger$  (anihilacji i kreacji) działają w *przestrzeni Focka* .

Stan odpowiadający wzbudzeniu pola  $\varphi$  (cząstki) o pędzie  $p$

$$|p\rangle = \varsigma_p a_p^\dagger |0\rangle$$

Wówczas iloczyn skalarny:

$$\langle q|p\rangle = \langle 0 | \varsigma_q a_q \varsigma_p a_p^\dagger | 0 \rangle = \varsigma_p^2 \langle 0 | [a_q, a_p^\dagger] | 0 \rangle = (2\pi)^3 \lambda_p \varsigma_p^2 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

Amplituda prawdopodobieństwa, że cząstka znajduje się w punkcie  $x$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi(\mathbf{x}) | p \rangle &= \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\xi_q} a_q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \varsigma_p a_p^\dagger \right| 0 \right\rangle \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\varsigma_p}{\xi_q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \langle 0 | [a_q, a_p^\dagger] | 0 \rangle \\ &= \int d^3q \frac{\varsigma_p}{\xi_q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \langle 0 | \lambda_p \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) | 0 \rangle = \frac{\varsigma_p \lambda_p}{\xi_p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \end{aligned}$$

# Kwantowa teoria pola - konwencje

	$\xi_p$	$\varsigma_p$	$\lambda_p$	$\langle q p\rangle$	$\langle 0 \varphi(\mathbf{x}) p\rangle$
Itzykson – Zuber	$2E_p$	1	$2E_p$	$(2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$	$e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$
Peskin – Schroeder	$\sqrt{2E_p}$	$\sqrt{2E_p}$	1	$(2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$	$e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$
Bjorken – Drell Weinberg	$\frac{\sqrt{2E_p}}{(2\pi)^{3/2}}$	1	$\frac{1}{(2\pi)^3}$	$\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$	$\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$

Tablica 7.1: Konwencje normalizacji pola skalarnego.

# Zespolone pole skalarne

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2)$$

Odpowiadająca zespolonemu polu skalarnemu gęstość Lagrange'a

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

# Równanie Diraka

Aby relatywistyczna gęstość prawdopodobieństwa była dodatnio określona, równanie musi być liniowe w pochodnej czasowej (jak u Schrödingera)

$$E = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4}$$

Czyli powinno być także liniowe w pędach i masie:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi$$

# Równanie Diraka

Aby relatywistyczna gęstość prawdopodobieństwa była dodatnio określona, równanie musi być liniowe w pochodnej czasowej (jak u Schrödingera)

$$E = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4}$$

Czyli powinno być także liniowe w pędach i masie ( $c = 1$ ):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi$$

Podnosząc do kwadratu  $-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi.$

powinniśmy dostać równanie Kleina-Gordona.

# Równanie Diraka

Aby relatywistyczna gęstość prawdopodobieństwa była dodatnio określona, równanie musi być liniowe w pochodnej czasowej (jak u Schrödingera)

$$E = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4}$$

Czyli powinno być także liniowe w pędach i masie ( $c = 1$ ):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi$$

Podnosząc do kwadratu  $-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi$ .

powinniśmy dostać równanie Kleina-Gordona. W ten sposób dostajemy warunki na operatory (macierze)  $\boldsymbol{\alpha}$  i  $\beta$ .

$$(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) = 2\delta_{ij},$$

$$(\alpha_i \beta + \beta \alpha_j) = 0,$$

$$\beta^2 = 1.$$



# Macierze Diraka

Warunki na  $\alpha$  i  $\beta$  nie są jednoznaczne. Np.:  $(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) = 2\delta_{ij}$

$$\underbrace{U^\dagger \alpha_i U}_{\alpha'_i} \underbrace{U^\dagger \alpha_j U}_{\alpha'_j} + \underbrace{U^\dagger \alpha_j U}_{\alpha'_j} \underbrace{U^\dagger \alpha_i U}_{\alpha'_i} = 2\delta_{ij} \underbrace{U^\dagger U}_1$$

Popularne rozwiązania (4 x 4):

Reprezentacja Diraka

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reprezentacja chiralna

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Łatwo się przekonać

$$\rho = \psi^\dagger \psi, \mathbf{j} = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi$$

# Rozwiązania równania Diraka

Rozwiązania mają postać czterokomponentowych wektorów (bispinory Diraka).

Fala płaska:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} w(\mathbf{p})$$

gdzie czterokomponentowy bispinor  $w$  zapisujemy przy pomocy dwukomponentowych spinorów Weyla:

$$w = \begin{bmatrix} \phi \\ \eta \end{bmatrix}$$

W reprezentacji Diraka

$$\begin{bmatrix} (E - m) & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & (E + m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \eta \end{bmatrix} = 0$$

lub:

$$(E - m) \phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \eta;$$

$$(E + m) \eta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \phi$$

# Rozwiązania równania Diraka

Rozwiązania mają postać czterekomponentowych wektorów (bispinory Diraka).

Fala płaska:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} w(\mathbf{p})$$

gdzie czterekomponentowy bispinor  $w$  zapisujemy przy pomocy dwukomponentowych spinorów Weyla:

$$w = \begin{bmatrix} \phi \\ \eta \end{bmatrix}$$

W reprezentacji Diraka

$$\begin{bmatrix} (E - m) & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & (E + m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \eta \end{bmatrix} = 0$$

lub:  $(E - m)\phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \eta$ ;  $(E + m)\eta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \phi$  Z pierwszego r.  $\phi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} \eta$  z drugiego:  $\eta = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \phi$

Dostajemy:

$$\begin{aligned} (E - m)(E + m)\phi &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 \phi \\ (E + m)(E - m)\eta &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 \eta \end{aligned}$$

# Rozwiązania równania Diraka

$$(E - m)(E + m)\phi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 \phi$$

$$(E + m)(E - m)\eta = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 \eta.$$

Ponieważ:  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2$  rozwiązania istnieją gdy  $E_{\pm} = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ .

# Rozwiązania równania Diraka

$$(E - m)(E + m)\phi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 \phi$$

$$(E + m)(E - m)\eta = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 \eta.$$

Ponieważ:  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2$  rozwiązania istnieją gdy  $E_{\pm} = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ .

Energia dodatnia:  $E_p = E_+$  istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania, które zapisujemy przy pomocy

$$\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \chi^{(1,2)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi^{(1,2)} \end{bmatrix}$$

# Rozwiązania równania Diraka

$$(E - m)(E + m)\phi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 \phi$$

$$(E + m)(E - m)\eta = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 \eta.$$

Ponieważ:  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2$  rozwiązania istnieją gdy  $E_{\pm} = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ .

Energia dodatnia:  $E_p = E_+$  istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania, które zapisujemy przy pomocy

$$\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \chi^{(1,2)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi^{(1,2)} \end{bmatrix}$$

Energia ujemna:  $E = -E_p$  użyjemy  $\phi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} \eta$

co daje  $w^{(3,4)} = \begin{bmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \eta \\ \eta \end{bmatrix}$

# Rozwiązania równania Diraka

$$(E - m)(E + m)\phi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 \phi$$

$$(E + m)(E - m)\eta = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 \eta.$$

Ponieważ:  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2$  rozwiązania istnieją gdy  $E_{\pm} = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ .

Energia dodatnia:  $E_p = E_+$  istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania, które zapisujemy przy pomocy

$$\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \chi^{(1,2)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi^{(1,2)} \end{bmatrix}$$

Energia ujemna:  $E = -E_p$  użyjemy  $\phi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} \eta$

co daje  $w^{(3,4)} = \begin{bmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \eta \\ \eta \end{bmatrix}$  Rozwiązania te chcemy zinterpretować jako antycząstki

o **dodatniej energii**. Aby zachować względny znak między energią a pędem w fali płaskiej, musimy też zmienić znak pędu.

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} w(p)$$

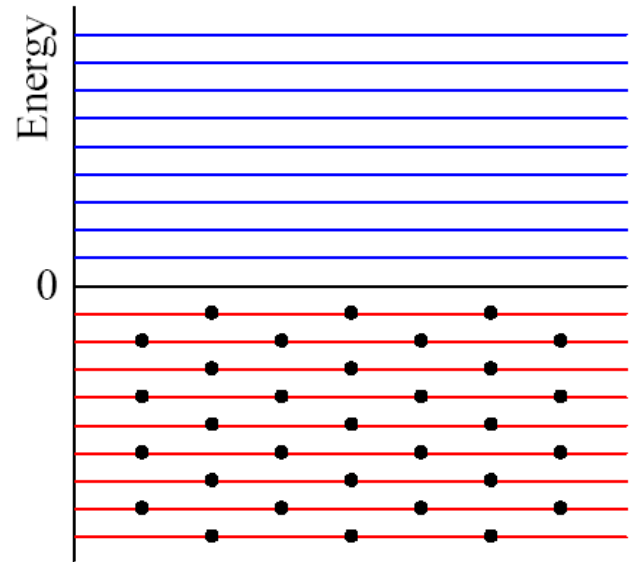
# Anycząstki

Morze Diraka:

Wszystkie poziomy o ujemnej energii są wypełnione. Antycząstka odpowiada opróżnieniu jednego stanu w morzu Diraka (dziura). Takie wzbudzenie ma pęd i spin przeciwny do pędu i spinu opróżnionego poziomu. Stąd dwa rozwiązania o spinie "do góry" (4) i o spinie "w dół" (3) przyjmują postać:

$$w^{(3,4)} = \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi^{(2,1)} \\ \chi^{(2,1)} \end{bmatrix}$$

$$\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

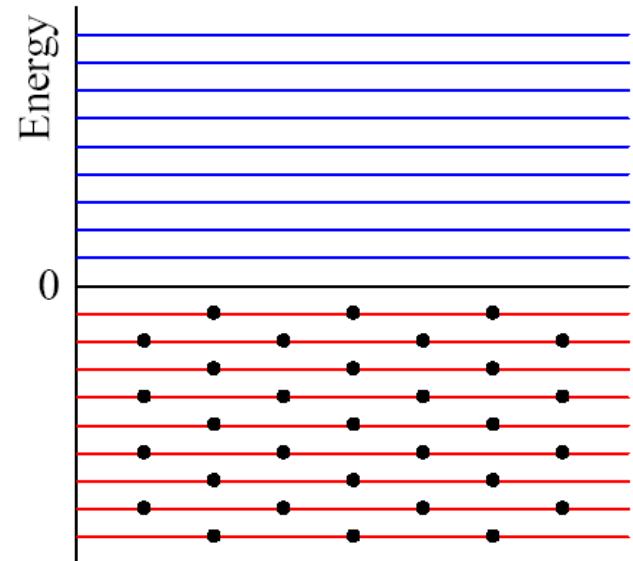




# Antycząstki

Morze Diraka:

Wszystkie poziomy o ujemnej energii są wypełnione. Antycząstka odpowiada opróżnieniu jednego stanu w morzu Diraka (dziura). Takie wzbudzenie ma pęd i spin przeciwny do pędu i spinu opróżnionego poziomu. Stąd dwa rozwiązania o spinie "do góry" (4) i o spinie "w dół" (3) przyjmują postać:



$$w^{(3,4)} = \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi^{(2,1)} \\ \chi^{(2,1)} \end{bmatrix} \quad \chi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

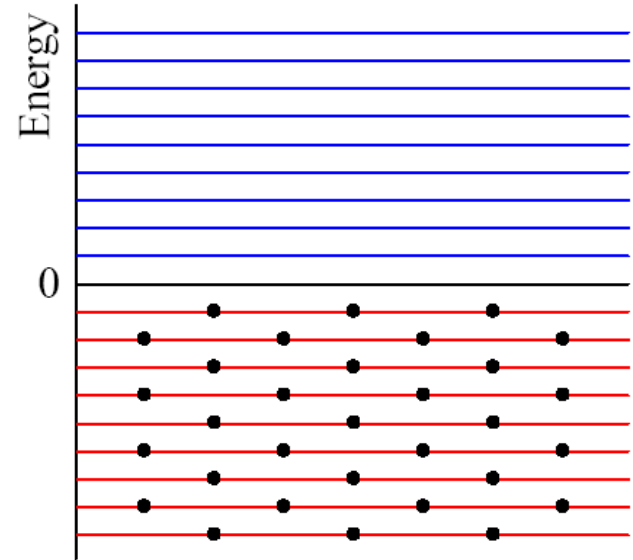
Konwencja na normalizację:

$$u(p, s) = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \chi(s) \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi(s) \end{bmatrix}, \quad v(p, s) = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi(s) \\ \chi(s) \end{bmatrix}$$

# Antycząstki

Morze Diraka:

Wszystkie poziomy o ujemnej energii są wypełnione. Antycząstka odpowiada opróżnieniu jednego stanu w morzu Diraka (dziura). Takie wzbudzenie ma pęd i spin przeciwny do pędu i spinu opróżnionego poziomu. Stąd dwa rozwiązania o spinie "do góry" (4) i o spinie "w dół" (3) przyjmują postać:



$$w^{(3,4)} = \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi^{(2,1)} \\ \chi^{(2,1)} \end{bmatrix} \quad \chi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Konwencja na normalizację:

$$u^\dagger u = v^\dagger v = 2E_p$$

$$u(p, s) = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \chi(s) \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi(s) \end{bmatrix}, \quad v(p, s) = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi(s) \\ \chi(s) \end{bmatrix}$$

Z równania Diraka wynika

- istnienie spinu

- istnienie antycząstek

# Równanie Diraka - antycząstki



**1927** P.A.M. Dirac uogólnia równanie Schrödingera na przypadek relatywistyczny:

Nobel 1933

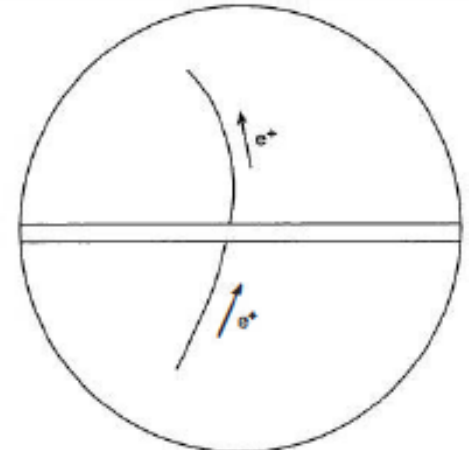
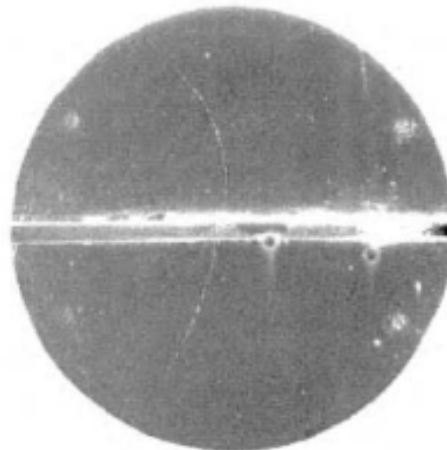
- spin  $\frac{1}{2}$
- antycząstki

**1932** Anderson odkrywa w promieniach kosmicznych pozytron



komora  
pęcherzykowa  
w polu  
magnetycznym

Nobel 1936



# Macierze gamma

Macierze gamma  $\gamma^0 = \beta, \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha}$

Mnożymy równanie  $i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi$  z lewej strony przez  $\gamma^0 = \beta$  i dostajemy:

$$(i \gamma^0 \partial_t + i \gamma^k \partial_k - m) \psi = 0$$

gdyż:  $\beta^2 = 1$  oraz  $\mathbf{p} = -i \nabla$

# Macierze gamma

Macierze gamma  $\gamma^0 = \beta, \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha}$

Mnożymy równanie  $i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi$  z lewej strony przez  $\gamma^0 = \beta$  i dostajemy:

$$(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^k\partial_k - m)\psi = 0$$

gdyż:  $\beta^2 = 1$  oraz  $\mathbf{p} = -i\nabla$

Definiujemy "slash" Diraka:  $\gamma^0\partial_t + \gamma^k\partial_k = \gamma^\mu\partial_\mu = \not{\partial}$

Wówczas:  $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$

# Macierze gamma

Macierze gamma  $\gamma^0 = \beta, \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha}$

Mnożymy równanie  $i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi$  z lewej strony przez  $\gamma^0 = \beta$  i dostajemy:

$$(i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^k \partial_k - m) \psi = 0$$

gdź:  $\beta^2 = 1$  oraz  $\mathbf{p} = -i\nabla$

Definiujemy "slash" Diraka:  $\gamma^0 \partial_t + \gamma^k \partial_k = \gamma^\mu \partial_\mu = \not{\partial}$

Wówczas:  $(i\not{\partial} - m) \psi = 0$

Macierze gamma  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

reprezentacja Diraka

Reprezentacja chiralna:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}$$

# Gęstość Lagrange'a

Równanie Diraka można wyprowadzić z następującej g. Lagrange'a:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \psi^\dagger(x)(i\partial_t + i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} - \beta m)\psi(x) \\ &= \psi^\dagger(x)\beta(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) \quad \longleftarrow \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0\end{aligned}$$

Najwygodniej zróżniczkować  $\mathcal{L}(x)$  po  $\bar{\psi}$ .

Kwantyzacja: 
$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{p,s}u(p,s)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + b_{p,s}^\dagger v(p,s)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})$$

Normalizacja: 
$$\bar{u}(p,s')u(p,s) = 2m\delta_{ss'}, \quad \bar{v}(p,s')v(p,s) = -2m\delta_{ss'}$$

Składowe Fourierowskie zmieniamy na operatory (BD):

$$\left\{ a_{p,s}, a_{p',s'}^\dagger \right\} = \left\{ b_{p,s}, b_{p',s'}^\dagger \right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'}$$



# Elektrodynamika – pole wektorowe

Równania  
Maxwella:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \quad (\text{a}), & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j} \quad (\text{b}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{c}), & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad (\text{d}).\end{aligned}$$

Źródła:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{gdzie} \quad j^\mu = (\rho, \mathbf{j}).$$

# Elektrodynamika – pole wektorowe

Równania  
Maxwella:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \quad (\text{a}), & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j} \quad (\text{b}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{c}), & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad (\text{d}).\end{aligned}$$

---

Źródła:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{gdzie} \quad j^\mu = (\rho, \mathbf{j}).$$

Równania (c) i (d) są równoważne istnieniu potencjałów:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

# Elektrodynamika – pole wektorowe

Równania  
Maxwella:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \quad (\text{a}), & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j} \quad (\text{b}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{c}), & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad (\text{d}).\end{aligned}$$

---

Źródła:  
zachowanie ładunku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{gdzie} \quad j^\mu = (\rho, \mathbf{j}).$$

Równania (c) i (d) są równoważne istnieniu potencjałów:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Czteropotencjał:  $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$

Tensor pola:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

# Elektrodynamika – pole wektorowe

Równania  
Maxwella:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \quad (\text{a}), & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j} \quad (\text{b}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{c}), & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad (\text{d}). \end{aligned}$$

Źródła:  
zachowanie ładunku!

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{gdzie} \quad j^\mu = (\rho, \mathbf{j}).$$

Równania (c) i (d) są równoważne istnieniu potencjałów:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Czteropotencjał:  $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$

Tensor pola:  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

R. Maxwella: (c+d) tożsamość:  $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} \equiv 0$ . (a+b):  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

# Gęstość Lagrange'a

Przeprowadzając rachunek wariacyjny.  $A^\mu \rightarrow A^\mu + (\delta A)^\mu$  dla gęstości Lagrange'a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu$$

otrzymujemy równania Maxwella (a+b).

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu \right] && \text{wariacja kwadratu } \delta F^2 = 2F(\delta F) \\ &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\delta F)^{\mu\nu} - j^\nu (\delta A)_\nu \right] && \text{jawna postać } (\delta F)^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}[\partial^\mu (\delta A)^\nu - \partial^\nu (\delta A)^\mu] - j^\nu (\delta A)_\nu \right] && \text{antysymetria } F_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x [-F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A)^\nu - j^\nu (\delta A)_\nu] && \text{całka przez części} \\ &= \int d^4x [\partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu] (\delta A)_\nu = 0.\end{aligned}$$

# Gęstość Lagrange'a

Przeprowadzając rachunek wariacyjny.  $A^\mu \rightarrow A^\mu + (\delta A)^\mu$  dla gęstości Lagrange'a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu$$

otrzymujemy równania Maxwella.

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu \right] && \text{wariacja kwadratu } \delta F^2 = 2F(\delta F) \\ &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\delta F)^{\mu\nu} - j^\nu (\delta A)_\nu \right] && \text{jawna postać } (\delta F)^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}[\partial^\mu (\delta A)^\nu - \partial^\nu (\delta A)^\mu] - j^\nu (\delta A)_\nu \right] && \text{antysymetria } F_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x [-F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A)^\nu - j^\nu (\delta A)_\nu] && \text{całka przez części} \\ &= \int d^4x [\partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu] (\delta A)_\nu = 0. \\ &= 0\end{aligned}$$

# Swoboda cechowania

Portencjały  $A^\mu$  oraz  $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$  prowadzą do tego samego tensora pola, gdyż człon  $\partial^\mu \partial^\nu \chi$  jest symetryczny w indeksach  $\mu$  oraz  $\nu$  i wkłady od  $\chi$  kasują się.

Ale zmienia się działanie:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu \quad \longrightarrow \quad \Delta S = -\int d^4x j_\nu \partial^\nu \chi = \int d^4x (\partial^\nu j_\nu) \chi$$

# Swoboda cechowania

Portencjały  $A^\mu$  oraz  $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$  prowadzą do tego samego tensora pola, gdyż człon  $\partial^\mu \partial^\nu \chi$  jest symetryczny w indeksach  $\mu$  oraz  $\nu$  i wkłady od  $\chi$  kasują się.

Ale zmienia się działanie:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu \quad \longrightarrow \quad \Delta S = - \int d^4x j_\nu \partial^\nu \chi = \int d^4x (\partial^\nu j_\nu) \chi$$

Działanie jest niezmiennicze względem transformacji cechowania

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

dla dowolnego  $\chi$  jedynie, gdy spełnione jest równanie ciągłości (zachowane ładunku)

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$



# Swoboda cechowania

Portencjały  $A^\mu$  oraz  $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$  prowadzą do tego samego tensora pola, gdyż człon  $\partial^\mu \partial^\nu \chi$  jest symetryczny w indeksach  $\mu$  oraz  $\nu$  i wkłady od  $\chi$  kasują się.

Ale zmienia się działanie:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu \quad \longrightarrow \quad \Delta S = - \int d^4x j_\nu \partial^\nu \chi = \int d^4x (\partial^\nu j_\nu) \chi$$

Działanie jest niezmiennicze względem transformacji cechowania

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

dla dowolnego  $\chi$  jedynie gdy spełnione jest równanie ciągłości (zachowane ładunku)

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

**Niezmienniczość względem transformacji cechowania implikuje zachowanie ładunku.**

# Kwantyzacja pola wektorowego

Mogłoby się wydawać, że każdą składową pola  $A^\mu$  kwantujemy jak pole skalarne. Jednak niezmienniczość względem zmiany cechowania wprowadza komplikacje.

# Kwantyzacja pola wektorowego

Mogłoby się wydawać, że każdą składową pola  $A^\mu$  kwantujemy jak pole skalarne. Jednak niezmienniczość względem zmiany cechowania wprowadza komplikacje.

Rozpiszmy równanie  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$  za pomocą potencjałów

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$$

# Kwantyzacja pola wektorowego

Mogłoby się wydawać, że każdą składową pola  $A^\mu$  kwantujemy jak pole skalarne. Jednak niezmienniczość względem zmiany cechowania wprowadza komplikacje.

Rozpiszmy równanie  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$  za pomocą potencjałów

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$$

Musimy ustalić cechowanie. Mamy wiele możliwości. Najwygodniej jest wybrać cechowanie Coulomba (radiacyjne):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Warunek ten jest sformułowany w konkretnym układzie współrzędnych i nie jest lorentzowsko niezmienniczy.

# Kwantyzacja pola wektorowego

Mogłoby się wydawać, że każdą składową pola  $A^\mu$  kwantujemy jak pole skalarne. Jednak niezmienniczość względem zmiany cechowania wprowadza komplikacje.

Rozpiszmy równanie  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$  za pomocą potencjałów

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$$

Musimy ustalić cechowanie. Mamy wiele możliwości. Najwygodniej jest wybrać cechowanie Coulomba (radiacyjne):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Warunek ten jest sformułowany w konkretnym układzie współrzędnych i nie jest lorentzowsko niezmienniczy.

Najpierw znajdujemy rozwiązanie na  $A^0 = \Phi$ . W cechowaniu Coulomba  $\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0$  i równanie Maxwella (powyżej) dla  $\mathbf{v} = 0$  przyjmuje postać

$$\partial_i \partial^i A^0 = -\nabla^2 \Phi = \rho$$

(człony z pochodnymi czasowymi się kasują).

# Kwantyzacja pola wektorowego

Równanie Poissona  $-\nabla^2\Phi = \rho$  rozwiązujemy metodą funkcji Greena

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

W cechowaniu Coulomba potencjał elektrostatyczny  $\Phi = A^0$  jest *na sztywno* związany z ładunkiem i nie ma rozwiązań falowych na  $A^0$ .

# Kwantyzacja pola wektorowego

Równanie Poissona  $-\nabla^2\Phi = \rho$  rozwiązujemy metodą funkcji Greena

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

W cechowaniu Coulomba potencjał elektrostatyczny  $\Phi = A^0$  jest *na sztywno* związany z ładunkiem i nie ma rozwiązań falowych na  $A^0$ .

Równanie na potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^i + \partial^i (\partial_\mu A^\mu) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} A^i - \nabla^2 A^i + \frac{\partial}{\partial t} \nabla^i A^0 = j^i$$

# Kwantyzacja pola wektorowego

Równanie Poissona  $-\nabla^2\Phi = \rho$  rozwiązujemy metodą funkcji Greena

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

W cechowaniu Coulomba potencjał elektrostatyczny  $\Phi = A^0$  jest *na sztywno* związany z ładunkiem i nie ma rozwiązań falowych na  $A^0$ .

Równanie na potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^i + \partial^i (\partial_\mu A^\mu) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} A^i - \nabla^2 A^i + \frac{\partial}{\partial t} \nabla^i A^0 = j^i$$

W próżni:

$$A^0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial t^2} - \nabla^2 A^i = 0. \text{ Są to trzy bezmasowe równania Kleina-Gorodna na składowe } A^{1,2,3}$$



# Kwantyzacja pola wektorowego

Równanie Poissona  $-\nabla^2\Phi = \rho$  rozwiązujemy metodą funkcji Greena

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

W cechowaniu Coulomba potencjał elektrostatyczny  $\Phi = A^0$  jest *na sztywno* związany z ładunkiem i nie ma rozwiązań falowych na  $A^0$ .

Równanie na potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^i + \partial^i (\partial_\mu A^\mu) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} A^i - \nabla^2 A^i + \frac{\partial}{\partial t} \nabla^i A^0 = j^i$$

W próżni:

$$A^0 = 0,$$

$\frac{\partial^2 A^i}{\partial t^2} - \nabla^2 A^i = 0$ . Są to trzy bezmasowe równania Kleina-Gorodna na składowe  $A^{1,2,3}$ . Jednak nie są to składowe niezależne ze względu na więź  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

# Kwantyzacja pola wektorowego

Rozwiązań równania  $\frac{\partial^2 A^i}{\partial t^2} - \nabla^2 A^i = 0$ . szukamy w postaci fal płaskich

$$A^i(t, \mathbf{x}) = e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \varepsilon^i(\mathbf{k})$$

gdzie wektory polaryzacji  $\varepsilon$  spełniają warunek  $\mathbf{k} \cdot \varepsilon = 0$ . Tylko dwie składowe są niezależne (foton ma dwie polaryzacje). Przyjmujemy normalizację

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$$

# Kwantyzacja pola wektorowego

Rozwiązań równania  $\frac{\partial^2 A^i}{\partial t^2} - \nabla^2 A^i = 0$ . szukamy w postaci fal płaskich

$$A^i(t, \mathbf{x}) = e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \varepsilon^i(\mathbf{k})$$

gdzie wektory polaryzacji  $\varepsilon$  spełniają warunek  $\mathbf{k} \cdot \varepsilon = 0$ . Tylko dwie składowe są niezależne (foton ma dwie polaryzacje). Przyjmujemy normalizację

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$$

Rozkład na fale płaskie:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda) \left( a_{k,\lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_{k,\lambda}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right)$$

Współczynniki rozkładu zmieniamy na operatory, które spełniają reguły komutacji (BD)

$$\left[ a_{k,\lambda}, a_{k',\lambda'}^{\dagger} \right] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}$$

# Czy foton może mieć masę?

Założmy

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - j^\mu A_\mu$$

Wówczas r. ruchu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = j^\nu$$

Taka teoria nie jest niezmiennicza ze względu na transformację cechowania (!).

# Czy foton może mieć masę?

Założmy

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - j^\mu A_\mu$$

Wówczas r. ruchu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = j^\nu$$

Taka teoria nie jest niezmiennicza ze względu na transformację cechowania (!).

Niezmienniczość względem transformacji cechowania  
implikuje że foton (bozon pośredniczący)  
jest bezmasowy.

# Czy foton może mieć masę?

Założmy

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - j^\mu A_\mu$$

Wówczas r. ruchu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = j^\nu$$

Taka teoria nie jest niezmiennicza ze względu na transformację cechowania (!).

Zróżniczkujemy równanie powyżej po  $\partial_\nu$

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu j^\nu$$

Jest to jeden warunek na cztery składowe, czyli mamy trzy niezależne składowe, trzy polaryzacje.

# Czy foton może mieć masę?

Założmy

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - j^\mu A_\mu$$

Wówczas r. ruchu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = j^\nu$$

Taka teoria nie jest niezmiennicza ze względu na transformację cechowania (!).

Zróżniczkujemy równanie powyżej po  $\partial_\nu$

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu j^\nu$$

Jest to jeden warunek na cztery składowe, czyli mamy trzy niezależne składowe, trzy polaryzacje.

W próżni  $\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\nu + m^2 A^\nu = 0$  Są to cztery równania Kleina-Gordona z masą (teoria Proki)

Warunek na wektory polaryzacji w rozkładzie na fale płaskie  $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$

# Wektory polaryzacji dla teorii z masą

$$\tilde{k}_\mu \varepsilon^\mu = 0$$

Wyberzmy układ współrzędnych, gdzie  $k^\mu = (\omega, 0, 0, k)$  (ruch wzdłuż osi z). Wówczas

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

Normalizacja  $\varepsilon^2 = -1$

Masowe pole wektorowe to nie science fiction. Oddziaływania słabe wymagają wprowadzenia masy dla bozonów pośredniczących (nie fotonu) w sposób niezmienniczy ze względu na zmianę cechowania  $\longrightarrow$  mechanizm Higgsa, spontaniczne łamanie symetrii.