Wstęp do fizyki cząstek elementarnych

Zestaw 3

1. Wykazać, że parzystość G zdefiniowana na wykładzie dla cząstek z multipletu izospinowego I daje się zapisać, jako $G = (-1)^I C$.

2. Z twierdzenia Eckarta-Wignera wynika, że element macierzowy operatora $O_8^{(\mathbf{8})}$ (operatora transformującego się jak stan $|8\rangle$ w oktetowej reprezentacji) można zapisać jako:

$$\begin{aligned}\langle(\mathbf{8})\,Y,I,I_3|\,O_8^{(\mathbf{8})}\,|(\mathbf{8})\,Y,I,I_3\rangle &= \alpha_1 \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}_1 \\ 0,0,0 & Y,I,I_3 & Y,I,I_3 \end{array}\right) \\ &+ \alpha_2 \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}_2 \\ 0,0,0 & Y,I,I_3 & Y,I,I_3 \end{array}\right),\end{aligned}$$

gdzie uwzględniono, że w złożeniu dwu reprezentacji oktetowych SU(3) pojawiają się dwie różne nieredukowalne reprezentacje oktetowe $\mathbf{8}_1$ i $\mathbf{8}_2$. Współczynniki Clebscha–Gordana SU(3) można znaleźć w tablicach podlinkowanych na stronie kursu. Z ich użyciem sprawdzić, że

$$\langle(\mathbf{8})\,Y,I,I_3|\,O_8^{(\mathbf{8})}\,|(\mathbf{8})\,Y,I,I_3\rangle = a' + bY + c\left[I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2\right].$$

Wrazić, a', b i c przez α_1 i α_2.

3. Znane są następujące lekkie wzbudzone mezony wektorowe $J^P = 1^-$ (dla mezonów neutralnych z tego multipletu $J^P = 1^{--}$): 3 mezony $\rho(1.47)$, $\omega(1.42)$, $\phi(1.68)$ oraz 4 mezony $K^*(1.41)$ (liczby w nawiasach odpowiadają przybliżonej masie cząstki w GeV). Proszę odczytać ich dokładne masy z tablic on-line (http://pdglive.lbl.gov/) i korzystając z podanych tam liczby kwantowych (w szczególności ładunku i izospinu oznaczonego jako I) przypisać im odpowiednie miejsce w reprezentacjach grupy SU(3): oktecie i singlecie. Sprawdzić dokładność tego przyporządkowania badając relację Gell-Manna–Okubo (GMO) dla kwadratów mas. Obliczyć ewentualny kąt mieszania singletów izospinowych.

4. Hiperon Ω^- jest cząstką o spinie 3/2 i tzw. wewnętrznej parzystości przestrzennej +1. Ω^- rozpada się na bezspinowy mezon K^- o wewnętrznej parzystości −1 i hiperon Λ^0 o spinie 1/2 i wewnętrznej parzystości +1:

$$\Omega^- \to K^- + \Lambda^0.$$

Jaką formę ma najogólniejszy rozkład kątowy mezonu K^- względem kierunku spinu Ω^- jeżeli spoczywający przed rozpadem hiperon Ω^- miał rzut spinu na oś z równy 3/2? Jakie ograniczenia na ten rozkład narzuca zachowanie parzystości przestrzennej?

Wskazówka *Rozpad, który rozważamy, jest dwuciałowy. W układzie spoczynkowym* Ω^- *pędy* K^- *i* Λ^0 *równe co do wartości (jednoznacznie określonej przez kinematykę) i przeciwne, dlatego przestrzenną część funkcji falowej pary* (K^-, Λ^0) *określa funkcja falowa zależna od kątów* (θ, φ) *w układzie współrzednych sferycznych kierunku ruchu mezonu* K^- *względem kierunku spinu rozpadającej się cząstki* Ω^-*. Kwadrat modułu tej samej funkcji falowej zależnej od kątów określa kątowy rozkład mezonu* K^-*. Ograniczenia, którym podlega ten rozkład wynikają z zasady zachowania momentu pędu. Należy wziąć pod uwagę, że całkowity moment pędu dla stanu po rozpadzie jest sumą spinów* K^- *i* Λ^0 *oraz orbitalnego momentu pędu* $\vec{L}$ *dla tej pary. Używając zasady zachowania momentu pędu i odpowiednich współczynników Clebscha–Gordana, proszę zbudować możliwe stany spinów i orbitalnego momentu pędu pary* (K^-, Λ^0) *w tym rozpadzie. Następnie proszę uwzględnić to, że funkcje własne orbitalnego momentu pędu to fukcje kuliste* $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ *o parzystości przestrzennej* $(-1)^l$.

5. Bardzo uproszczone podejście modelowe do opisu mas cząstek złożonych z kwarków zakłada, że masa M cząstki złożonej z n kwarków (i/lub antykwarków) ma postać

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i + 4 \sum_{i>j}^{n} \frac{\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j}{m_i m_j} v_{ij}, \tag{1}$$

gdzie m_i oznaczają masy „konstytuentne” (na ogół różne od mas kwarków nadanych przez mechanizm Higgsa). Drugi człon odpowiada za oddziaływanie spinowych momentów magnetycznych ($\vec{s}_i$ oznacza spin kwarku i). Stałe sprzężenia tego oddziaływania v_{ij} mogłyby w zasadzie zależeć od rodzajów oddziałujących kwarków, ale na potrzeby tego zadania proszę przyjąć, że $v_{ij} = v$. Zakładając, że $m_u = m_d$, wykazać, że masa nukleonu i rezonansu Δ o spinach odpowiednio 1/2 i 3/2 wynoszą:

$$\begin{aligned} M_N &= 3m_u - 3\frac{v}{m_u^2}, \\ M_\Delta &= 3m_u + 3\frac{v}{m_u^2}. \end{aligned}$$

Wyprowadzając te wzory proszę uzasadnić, że dwa kwarki *tego samego rodzaju* muszą być spinowej kombinacji symetrycznej, natomiast spiny dwa kwarków różnych rodzajów mogą się składać na całkowity spin 0 lub 1 i zastosować wnioski w rozwiązaniu.

Proszę wyznaczyć wartości parametrów m_u i v z porównania z mierzonymi masami nukleonu i Δ (masy uśrednić po multipletach izospinowych).

6. Korzystając z tego samego wzoru obliczyć masy mezonów pseudoskalarnych o spinie 0: π oraz K, a także mezonów wektorowych o spinie 1: ρ oraz K^*. W obliczeniach numerycznych przyjąć wartość m_u z poprzedniego zadania, i wyznaczyć m_s oraz stałą sprzężenia v tak, by otrzymać jak najlepszy opis mas mezonów(założyć, że stała $v_{ij} = v$ jest identyczna dla wszystkich par kwark-antykwark, ale może mieć inną wartość niż dla barionów, gdyż dotyczy oddziaływania kwark-antykwark).