Wstęp do fizyki cząstek elementarnych

Zestaw 1

1. Równanie Diraka ma postać
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\psi,$$
gdzie
$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix},\ \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Nie jest to jedyna możliwa reprezentacja dla macierzy α_i i β. Sprawdzić, że macierze
$$\tilde{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{bmatrix},\ \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
spełniają warunki wymagane, aby równanie Diraka podniesione do kwadratu zamieniało się w równanie Kleina-Gordona. Znaleźć transformację U, która łączy te reprezentacje:
$$\alpha_i = U\tilde{\alpha}_i U^\dagger,\ \beta = U\tilde{\beta}U^\dagger.$$
Zapisać w sposób jawny równanie Diraka przy pomocy macierzy $\tilde{\alpha}_i$ i $\tilde{\beta}$ i pokazać, że dla $m = 0$ równanie Diraka rozsprzęga się na dwa niezależne równania (zwane równaniami Weyla).

2. Dla podanych na wykładzie rozwiązań równania Diraka unormowanych w następujący sposób
$$u^\dagger u = v^\dagger v = 2E_p$$
obliczyć iloczyny
$$\bar{u}u \text{ oraz } \bar{v}v.$$

3. Sprawdzić reguły antykomutacji dla równania Diraka
$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}.$$

4. Oddziaływania słabe nie zachowują parzystości i uwzględnienie tego faktu wymaga wprowadzenia macierzy
$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$
Wykazać, że
$$\left\{\gamma^\mu, \gamma^5\right\} = 0.$$
Obliczyć jawną postać macierzy γ^5 w reprezentacji Diraka i w reprezentacji chiralnej.

   Stany własne macierzy γ^5 nazywa się stanami o określonej chiralności, która wynosi $+1$ lub -1. Wykazać, że dla cząstek bezmasowych równanie Diraka rozsprzęga się na dwa niezależne równania na funkcje falowe o określonej chiralności. W tym celu zapisać równanie Diraka używając reprezentacji chiralnej dla macierzy γ.

5. Rzeczywiste rozwiązanie równania Kleina-Gordona rozkładamy na fale płaskie

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(a_k e^{-i(Et - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})} + a_k^\dagger e^{i(Et - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})} \right).$$

Uogólniony pęd dla lagrangianu Kleina Gordona wynosi $\pi(t, \boldsymbol{x}) = \partial_t \varphi(t, \boldsymbol{x})$ (dlaczego?). Przejście do kwantowej teorii pola polega na zastąpieniu φ oraz π przez operatory, które spełniają reguły komutacji

$$[\varphi(0, \boldsymbol{x}), \pi(0, \boldsymbol{y})] = i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

Jakie reguły komutacji muszą spełniać operatory a_k i $a_k^\dagger$ aby powyższa relacja była spełniona?