Wstęp do fizyki cząstek elementarnych

Zestaw 5

1. Będąca w spoczynku cząstka o masie m_1 rozpada się na dwie cząstki $1 \to 2+3$ o masach $m_{2,3}$. Proszę wyrazić energie $E_{2,3}$ cząstek powstałych w wyniku rozpadu poprzez masy spoczynkowe wszystkich cząstek. Wyrazić poprzez masy spoczynkowe moduły pędów $|\vec{p}_2|$ oraz $|\vec{p}_3|$. Przy rozwiązaniu tego zadania powinna pojawić się funkcja
$$\lambda(x^2, y^2, z^2) = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2.$$
Znaleźć rozkład λ na iloczyn czynników zawierających zmienne x, y, z w pierwszej potędze.

2. Proszę rozważyć element przestrzeni fazowej $d\Phi_n$ dla n cząstek o czteropędach p_i i całkowitym czteropędzie $P = \sum_{i=1}^n p_i$,
$$d\Phi_n(P \to p_1, \ldots, p_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - \sum_{i=1}^{n} p_i) \tag{1}$$
a) Proszę znaleźć wymiar tak określonej przestrzeni fazowej dla n cząstek.

b) Proszę wykazać, że miara objętości zdefiniowana przez $d\Phi_n$ jest niezmiennicza ze względu na przekształcenia Lorenzta.

c) Proszę pokazać, że element n-cząstkowej przestrzeni fazowej można rozfaktoryzować na elementy $(n-1)$-cząstkowej i dwucząstkowej przestrzeni fazowej:
$$d\Phi_n(P \to p_1, \ldots, p_n) = C\, dM^2\, d\Phi_{n-1}(P \to p_{12}, p_3, \ldots p_n)\, d\Phi_2(p_{12} \to p_1, p_2), \tag{2}$$
gdzie $p_{12} = p_1 + p_2$, a $M^2 = p_{12}^2$. Jaka jest wartość stałej C?

3. Zgodnie ze wzorem podanym na wykładzie dla rozpadu dwuciałowego cząstki o czteropędzie p_1 i masie m_1,
$$\Gamma_{1\to 2+3} = \int \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2E_{p_1}} \prod_{i=2}^{3} \left(\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 - \sum_{i=2}^{3} p_i \right). \tag{3}$$
Założyć, że cząstka 1 jest przed rozpadem w spoczynku $p_1 = (m_1, 0, 0, 0)$. Założyć, że element macierzowy $\mathcal{M}_{fi}$ jest pewną funkcją skalarną, zależną tylko od czteropędów $p_{1,2,3}$ (to założenie jest prawdziwe, jeśli w problemie nie ma dodatkowych czterowektorów, np. związanych z polaryzacją cząstek). Widać, że czteropęd p_1 jest stałym czterowektorem parametryzującym całki wykonywane w (3). Dzięki występującej w (3) funkcji $\delta^{(4)}$ można łatwo wykonać całkę po $d^3\vec{p}_3$. Po wykonaniu tego całkowania pozostaje całkowanie po $\vec{p}_2$ i jednowymiarowa δ-Diraca. Wiadomo jednak, że amplituda rozpraszania $\mathcal{M}_{fi}$ jest skalarem lorentzowskim, więc może zależeć tylko od kwadratu czteropędów $p_{1,2}^2$ i od ich iloczynu skalarnego $p_1 \cdot p_2$ (dlaczego?), a więc

nie zależy od kątów w układzie spoczynkowym rozpadającej się cząstki (dlaczego?). Okazuje się więc, że we wzorze (3) można wykonać wszystkie całki niezależnie od dynamiki rządzącej amplitudą przejścia $\mathcal{M}_{fi}$.

Proszę przeprowadzić to rozumowanie ilościowo, wykonać całki i podać końcowy wzór na Γ.

4. Podany na wykładzie wzór na rozpraszanie dwu cząstek na dwie cząstki: 1+2 $\to$ 3+4 ma postać

$$\sigma_{1+2\to 3,4} = \frac{1}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \int \prod_{i=3}^{4} \left(\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \times$$
$$\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4),$$

gdzie p_i to czteropędy cząstek, a ich masy spełniające warunki $m_i^2 = p_i^2$ są ustalonymi parametrami. Proszę opisać kinematykę cząstek stanu końcowego w układzie środka masy, w którym $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. Wykonując całkowanie wyrażenia z czterowymiarową deltą Diraca $\delta^{(4)}$, możemy wyeliminować $d^3\vec{p}_4$. Korzystając z tego, że amplituda $\mathcal{M}_{fi}$ jest skalarem Lorentza i założenia, że zależy tylko od czteropędów rozpraszających się cząstek, proszę wykazać, że w układzie środka masy $\mathcal{M}_{fi}$ może zależeć od kątów opisujących orientację wektora $\vec{p}_3$. Dlatego całkowania po $d\Phi_2(p_1 + p_2; p_3, p_4)$ nie można wykonać nie znając zależności $\mathcal{M}_{fi}$ od kątów. Stąd końcowy wzór można zapisać jako $\sigma = \int d\Omega\, d\sigma/d\Omega$, gdzie gdzie $d\Omega$ to element całkowania po kątach opisujących orientację wektora $\vec{p}_3$ w układzie środka masy, a $d\sigma/d\Omega$ to różniczowy przekrój czynny na rozpraszanie.

Proszę wykonać całki, które można wykonać ogólnie i wyprowadzić wzór na różniczkowy przekrój czynny $d\sigma/d\Omega$.

Wskazówka: *W zadaniach 3 i 4 wygodnie jest zmienić zmienne w całce po module pędu cząstek w stanie końcowym p na zmienną*

$$u = \sqrt{p^2 + m_2^2} + \sqrt{p^2 + m_3^2}$$

lub w przypadku zad.4

$$u = \sqrt{p^2 + m_3^2} + \sqrt{p^2 + m_4^2}.$$