Wstęp do fizyki cząstek elementarnych

Zestaw 4

1. **(za 2 pkt)** Rozważamy reakcje rozpraszania pionów π na nukleonie $N = p, n$:

$$\begin{aligned} \pi^+ p &\rightarrow \pi^+ p \\ \pi^- p &\rightarrow \pi^- p \\ \pi^- p &\rightarrow \pi^0 n \end{aligned}$$

Cząstki $\pi^\pm$ i π^0 stanowią tryplet izospinowy

$$\left|\pi^\pm\right\rangle = |1, \pm 1\rangle\,,\ \left|\pi^0\right\rangle = |1, 0\rangle$$

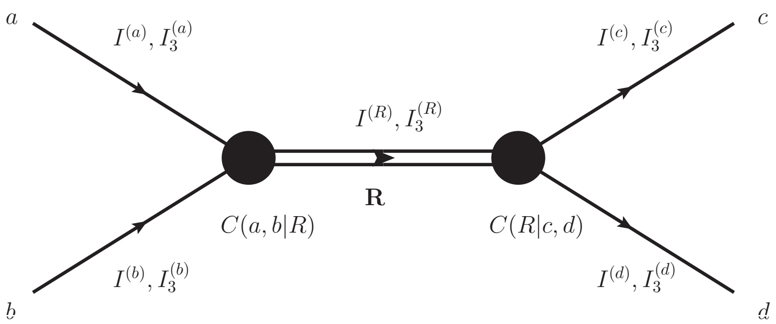
natomiast nukleony tworzą dublet

$$|p\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle,\ |n\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Izospin jest wielkością fizyczną o takich samych regułach składania reprezentacji jak moment pędu (opisywany jest reprezentacjami grupy SU(2)). Jest zachowany w oddziaływaniach silnych odpowiedzialnych za podane wyżej reakcje hadronów. Stany reprezentacji izospinowych numerujemy wartością I całkowitego izospinu oraz wartością rzutu izospinu I_3 na trzecią oś w wewnętrznej przestrzeni izospinu:

$$|I, I_3\rangle\,.$$

Rozpraszanie π-nukleon opisujemy jako zachodzące przez wiertualny hadronowy stan pośredni, zwany rezonansem. Diagram takiej reakcji podany jest na rysunku.



W rozważanych przez nas reakcjach wymieniane mogą być rezonanse Δ:

$$\left|\Delta^{++}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle,\ \left|\Delta^{+}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle,\ \left|\Delta^{0}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle,\ \left|\Delta^{-}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

lub rezonanse odpowadające wzbudzonym stanom nukleonu N^*

$$|p^*\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \ |n^*\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Obliczyć stosunki przekrojów czynnych na podane wyżej reakcje przyjmując, że zachodzą one poprzez uformowanie rezonansów Δ albo N^*.

Wskazówka: *Należy stwierdzić i uzasadnić, że amplitudy sprzężeń stanów (rzeczywistych i wirtualnych) o określonych wartościach (I, I_3) są proporcjonalne do odpowiednich współczynników Clebscha–Gordana dla izospinu. Korzystając z tego zbudować amplitudy rozpraszania rozkładając je na amplitudy sprzężeń hadronów w stanie początkowym (a, b) i rezonansów R, amplitudy propagacji rezonansów R (zależne od R) i amplitudy sprzężeń rezonansów i wychodzących hadronów (c, d). Przekrój czynny jest proporcjonalny do kwadratu amplitudy. Odpowiednie współczynniki Clebscha–Gordana odczytać z tablic.*

2. Hiperon Ω^- jest cząstką o spinie 3/2 i tzw. wewnętrznej parzystości przestrzennej $+1$. Ω^- rozpada się na bezspinowy mezon K^- o wewnętrznej parzystości -1 i hiperon Λ^0 o spinie 1/2 i wewnętrznej parzystości $+1$:

$$\Omega^- \to K^- + \Lambda^0.$$

Jaką formę ma najogólniejszy rozkład kątowy mezonu K^- względem kierunku spinu Ω^- jeżeli spoczywający przed rozpadem hiperon Ω^- miał rzut spinu na oś z równy 3/2? Jakie ograniczenia na ten rozkład narzuca zachowanie parzystości przestrzennej?

Wskazówka *Rozpad, który rozważamy, jest dwuciałowy. W układzie spoczynkowym Ω^- pędy K^- i Λ^0 równe co do wartości (jednoznacznie określonej przez kinematykę) i przeciwne, dlatego przestrzenną część funkcji falowej pary (K^-, Λ^0) określa funkcja falowa zależna od kątów (θ, φ) w układzie współrzednych sferycznych kierunku ruchu mezonu K^- względem kierunku spinu rozpadającej się cząstki Ω^-. Kwadrat modułu tej samej funkcji falowej zależnej od kątów określa kątowy rozkład mezonu K^-. Ograniczenia, którym podlega ten rozkład wynikają z zasady zachowania momentu pędu. Należy wziąć pod uwagę, że całkowity moment pędu dla stanu po rozpadzie jest sumą spinów K^- i Λ^0 oraz orbitalnego momentu pędu $\vec{L}$ dla tej pary. Używając zasady zachowania momentu pędu i odpowiednich współczynników Clebscha–Gordana, proszę zbudować możliwe stany spinów i orbitalnego momentu pędu pary (K^-, Λ^0) w tym rozpadzie. Następnie proszę uwzględnić to, że funkcje własne orbitalnego momentu pędu to fukcje kuliste $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ o parzystości przestrzennej $(-1)^l$.*

3. **(za 2 pkt)** Mezony z rodziny ψ i Υ, zbudowane z cieżkich kwarków $Q = b, c$ i ich antykwarków $\bar{Q}$, można w przybliżeniu traktować jak atom wodoru, to jest jak nierelatywistyczne układy dwuciałowe. W takim przybliżeniu te mezony można opisać równaniem Schrödingera dla jednej cząstki o masie efektywnej $m = M_Q/2$,

gdzie M_Q to masa kwarku, w centralnym potencjale $V(r)$. O postaci potencjału $V(r)$ można wnioskować z mierzonego doświadczalnie widma mas mezonów ψ i Υ.

Proszę rozważyć nierelatywistyczne, jednociałowe równanie Schrödingera dla takiego trójwymiarowego układu i założyć, że potencjał $V(r)$ opisywany jest:

$$\text{(i) funkcją logarytmiczną:} \qquad V(r) = A\ln(r/a)$$

lub

$$\text{(ii) funkcją potęgową:} \qquad V(r) = Br^{\alpha},$$

gdzie A, B, a i α to nieznane parametry potencjałów.

a) Proszę zapisać nierelatywistyczne równanie Schrödingera dla funkcji falowej $\psi(\vec{r})$ opisującej ten układ, odseparować część kątową i zapisać równanie dla radialnej części funkcji falowej $R(r) = \psi(r)/r$.

b) Proszę wykazać, że różnice między energiami stanów tego układu (masami mezonów) dla potencjału logarytmicznego (i) nie zależą od masy ciężkiego kwarku.

c) Proszę pokazać, że energie stanów własnych równania Schrödingera w przypadku (ii) skalują się jak pewna potęga masy $\beta(\alpha)$ zależna tylko od parametru α:

$$E_n = C_n(B,\alpha)m^{\beta(\alpha)},$$

gdzie $C(B,\alpha)$ nie zależy od masy m. Wyznaczyć funkcję $\beta(\alpha)$.

Wskazówka: *Rozwiązując problemy b) i c) proszę dokonać odpowiednich przeskalowań zmiennej $r \to r = \kappa x$ do zmiennej bezwymiarowej x i przetransformować równanie Schrödingera do tej zmiennej. W punkcie b) należy tak dobrać parametr przeskalowania κ, by wyeliminować m z członu kinetycznego. W punkcie c) należy dobrać κ i przekształcić równanie radialne do postaci: $-R''(x)+[l(l+1)/x^2]R(x) \pm x^{\alpha}R(x) = \epsilon R(x)$ i odwikłać z postaci ϵ uniwersalną zależność energii od masy m (l oznacza liczbę kwantową całkowitego momentu pędu). W rachunkach przyjąć konwencję $\hbar = 1$.*