Wstęp do fizyki cząstek elementarnych

Zestaw 1

1. Dla podanych na wykładzie macierzy α i β Diraka:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix},\ \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie σ_i są macierzami Pauliego:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

sprawdzić relacje:

$$\begin{aligned} (\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) &= 2\delta_{ij}, \\ (\alpha_i\beta + \beta\alpha_j) &= 0, \\ \beta^2 &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

2. Inna, chiralna reprezentacja macierzy α i β Diraka ma postać:

$$\alpha'_i = \begin{bmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix},\ \beta' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Znaleźć macierz U

$$\alpha'_i = U^\dagger \alpha_i U,\ \beta' = U^\dagger \beta U \tag{5}$$

łaczącą (1) z (4).

3. Proszę znaleźć rozwiązania równania Diraka w postaci fali płaskiej:

$$\psi(t, \vec{r}) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar} u(E, \vec{p}) \tag{6}$$

gdzie $u(E, \vec{p})$ jest stałym w czasoprzestrzeni wektorem o czterech składowych zespolonych (bispinorem):

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Znaleźć cztery niezależne rozwiązania dla u i podać ich interpretację.

Wskazówka: *na wykładzie podane zostały rozwiązania równania Diraka w reprezentacji Diraka. Należy rozwiązać podane równanie własne i sprawdzić postać otrzymanych rozwiązań, a potem rozwiązania unormować.*

4. Sprawdzić reguły antykomutacji dla macierzy γ Diraka:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{8}$$

5. a) Dla reprezentacji chiralnej macierzy γ Diraka podanej na wykładzie proszę obliczyć macierz γ_5, zdefiniowaną jako $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.
   b) Sprawdzić, że spełniona jest relacja $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$.
   c) Stany o określonej chiralności definiuje się jako stany własne macierzy γ_5. Pokazać, że dla cząstki bezmasowej równanie Diraka separuje się na niezależne sektory z określoną chiralnością.
   d) Wykazać, że dla cząstki bezmasowej chiralność powiązaną jest z helicity (skrętnością) $\hat{h}$, określoną jako rzut operatora spinu na kierunek wektora pędu cząstki $\hat{h} = \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$. Operator spinu cząstki $\vec{\Sigma}$ został zdefiniowany na wykładzie.