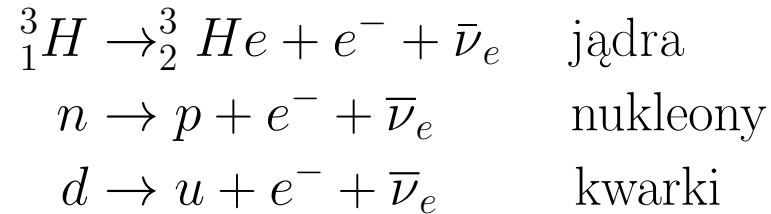


Oddziaływania słabe

Rozpady:

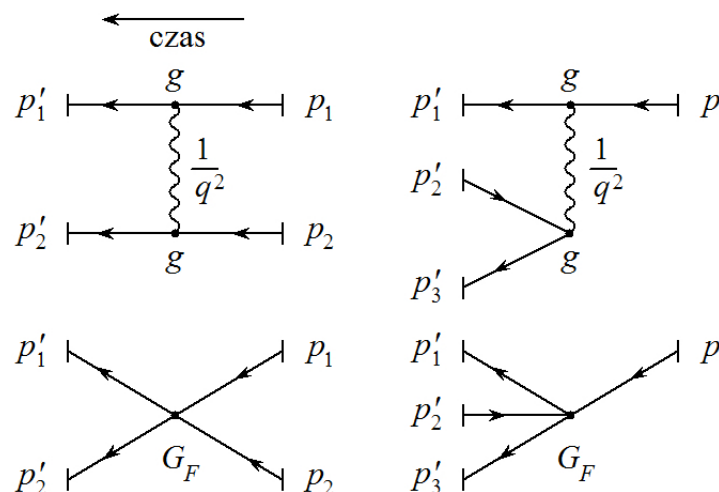


zachodzą poprzez oddziaływania zwane **słabymi**, gdyż średni czas życia wynosi minuty, podczas gdy typowy czas rozpadów elektromagnetycznych to 10^{-15} s. Jak opisać takie oddziaływania?

- Chcielibyśmy opisać oddziaływania słabe opisać przy pomocy teorii z symetrią cechowania opartą o jakąś grupę unitarną
- Enrico Fermi zaproponował w latach 1933-34 teorię rozpadu beta opartą o oddziaływanie czterofermionowe

Teoria Fermiego działa dobrze tylko w najniższym rzędzie rachunku zaburzeń, gdyż w wyższych rzędach pojawiają się nieskończoności, których nie da się jednoznacznie usunąć. Teorie cechowania nie mają takiego problemu ale...

Teoria cechowania vs. teoria Fermiego



Teoria Fermiego wymaga wprowadzenia stałej wymiarowej, G_F , zwaną stałą Fermiego, która określa siłę oddziaływań słabych, $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. W teorii z symetrią cechowania występuje bezwymiarowa (w jednostkach naturalnych) stała sprzężenia g oraz propagator bozonu pośredniczącego $1/q^2$, co sugeruje

$$G_F \sim g^2 \frac{1}{q^2}, \quad (1)$$

gdzie $q = p_1' - p$. Jednak G_F nie zależy od q .

Teoria cechowania vs. teoria Fermiego c.d.

Gdyby bozon pośredniczący miał masę, to:

$$G_F \sim g^2 \frac{1}{q^2} \rightarrow g^2 \frac{1}{q^2 - M^2} \underset{q^2 \ll M^2}{\sim} -g^2 \frac{1}{M^2}$$

i problem byłby rozwiązany.

Symetria cechowania gwarantuje, że bozony pośredniczące są **bezmassowe!**

Gęstość Lagrange'a, równania ruchu

W mechanice klasycznej zasada najmniejszego działania (czyli minimalizacja funkcjonału S)

$$S = \int_0^T dt L(x, \dot{x})$$

prowadzi do równań ruchu

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Teoria pola: gęstość Lagrange'a, która jest funkcjonałem pól i ich pochodnych (tu: pole skalarne φ):

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi); \quad x \rightarrow \varphi, \quad \frac{dx}{dt} \rightarrow \partial_0 \varphi. \quad (2)$$

Minimalizacja (2) prowadzi do równań ruchu

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0.$$

Gęstość Lagrange'a, równanie Kleina-Gordona

Gęstości Lagrange'a (przyjmujemy $\hbar = 1$ i $c = 1$):

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^2)$$

prowadzi do równania Kleina-Gordona:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0.$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0$$

- Współczynnik przy kwadracie pola jest równy masie.
- Gęstość Lagrange'a może zawierać wyższe potęgi pola φ , które odpowiadają za samoodziaływanie i na ogół traktuje się je jako zaburzenie.

Prosty model o symetrii U(1)

Rozważmy zespolone pole skalarne:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2).$$

Gęstość lagrangianu (rzeczywista) z potencjałem:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi),$$

gdzie zamiast członu masowego użyliśmy pewnej funkcji V , która jest funkcją modułu pola Φ . Taka gęstość Lagrange'a jest niezmiennicza ze względu na **globalną** transformację U(1):

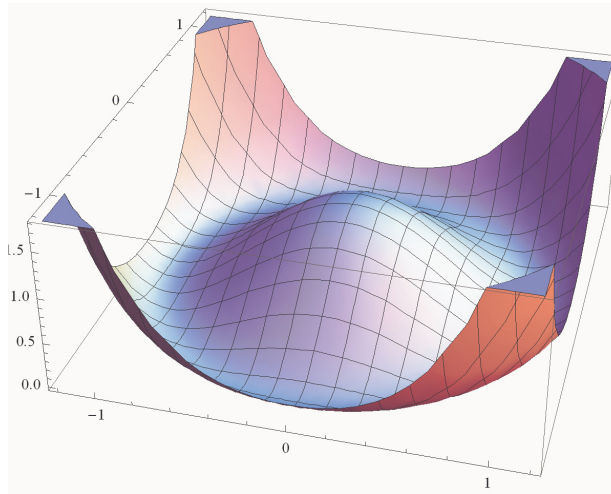
$$\Phi \rightarrow e^{-i\alpha} \Phi.$$

Spontaniczne łamanie globalnej symetrii U(1)

Wybierzmy

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2]^2,$$

gdzie ϕ_0 jest stałą. Wtedy minimum potencjału jest dla modułu $|\Phi| = \phi_0$.



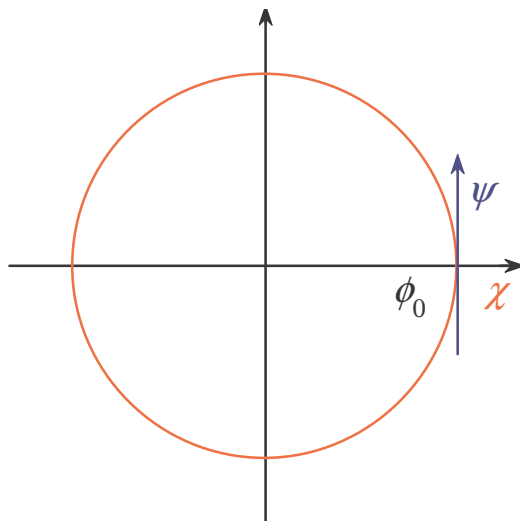
Minimum jest zdegenerowane:

$$\frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) = \phi_0^2.$$

Spontaniczne łamanie globalnej symetrii U(1) c.d.

Jednak system musi wybrać jakiś kierunek i wtedy następuje *spontaniczne łamanie symetrii* U(1). Symetria lagrangianu nie jest symetrią próżni. Niech próżnia ma postać

$$\Phi_0 = (\phi_0, 0)$$



Wtedy pole *dynamiczne*

$$\Phi = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi(x) + i\psi(x)).$$

Spontaniczne łamanie globalnej symetrii U(1) c.d.

Przepiszmy lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left[\sqrt{2}\phi_0\chi + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\psi^2 \right]^2$$

Podnieśmy nawias do kwadratu

$$[\dots]^2 = 2\phi_0^2\chi^2 + \text{wyższe potegi}$$

Wyższe potegi to oddziaływanie. Mamy

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - m^2\chi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi + \mathcal{L}_{\text{int}}.$$

Mamy:

- masowe pole χ
- bezmasowe pole ψ (bozon Goldstone'a)

Przykład zastosowań: łamanie symetrii chiralnej SU(2), trzy bozony Goldstone: mezony π .

Twierdzenie Goldstone'a

Na każdy *złamany* kierunek symetrii przypada bezmasowa cząstka
– bozon Goldstone'a

Spontaniczne łamanie lokalnej symetrii U(1), mechanizm Higgsa

Żądanie symetrii lokalnej

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{-i\theta(x)}\Phi(x)$$

dodaje pole wektorowe:

$$\partial_\mu\Phi \rightarrow (\partial_\mu + igA_\mu) \cdot \Phi$$

Symetria cechowania wymaga by

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x).$$

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu - igA_\mu)\Phi^\dagger] [(\partial^\mu + igA^\mu)\Phi] - V(\Phi^\dagger\Phi) + \dots,$$

Potencjał wybieramy jak poprzednio

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2]^2.$$

Spontaniczne łamanie lokalnej symetrii U(1), mechanizm Higgsa c.d.

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{-i\theta(x)}\Phi(x)$$

Różnica z poprzednim przypadkiem jest taka, że **czynnik fazowy zależy od x** i zawsze możemy tak wybrać cechowanie, żeby **$\Phi'(x)$ było wszędzie rzeczywiste**:

$$\Phi'(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x), \quad h(x) - \text{rzeczywiste.}$$

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu - igA_\mu)\Phi^\dagger] [(\partial^\mu + igA^\mu)\Phi] - V(\Phi^\dagger\Phi) + \dots,$$

rozkładamy na

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

gdzie

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2) + g^2 \phi_0^2 A_\mu A^\mu + \dots$$

Pole "fotonowe" ma masę proporcjonalną do:
średniej próżniowej pola Φ i stałej sprzężenia g .

Spontaniczne łamanie lokalnej symetrii U(1), mechanizm Higgsa c.d.

Dla kompletu

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g^2 A_\mu A^\mu \left(\sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2}h^2 \right) - \frac{m^2}{2\phi_0^2} h^2 \left(\sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{4}h^2 \right).$$

Dlatego chcemy startować z teorii z symetrią, a następnie łamać tę symetrię poprzez stan próżni, zamiast od razu poświęcić postulat symetrii cechowania i „ręcznie” dopisać człony masowe dla bozonów pośredniczących. Symetria cechowania bardzo restrykcyjnie określa, jakiego typu oddziaływania są w danej teorii dozwolone i nawet po jej spontanicznym złamaniu te restrykcje są zachowane.

Spontaniczne łamanie lokalnej symetrii $U(1)$, mechanizm Higgsa c.d.

Przed złamaniem symetrii mieliśmy 4 stopnie swobody:

- bezmasowe pole wektorowe – 2 stopnie swobody,
- zespolone pole skalarne – 2 stopnie swobody,

po złamaniu symetrii mamy

- masowe pole wektorowe – 3 stopnie swobody,
- jedno skalarne pole rzeczywiste – 1 stopień swobody.

Zjawisko zamiany jednego pola skalarnego na masę pola wektorowego nosi nazwę mechanizmu Higgsa, a pole skalarne h nazywamy polem Higgsa.

Łamanie symetrii $U(1)$ – podsumowanie

Łamanie symetrii globalnej

Twierdzenie Goldstone'a:

Na każdy *złamany* generator przypada bezmasowa cząstka zwana bozonem Goldstone'a. W naszym przykładzie grupa $U(1)$ miała tylko jeden generator i została całkowicie złamana.

Łamanie symetrii lokalnej

Mechanizm Higgsa:

Bezmasowy bozon Goldstone'a zostaje *zjedzony* przez pole wektorowe i dostarcza mu polaryzacji podłużnej; pole wektorowe uzyskuje masę.

Symetria $SU(2) \times U(1)$ – bozony pośredniczące

Rozpad beta zmienia ładunek. \rightarrow bozon pośredniczący jest naładowany
 \rightarrow oddziałuje elektromagnetycznie \rightarrow oddziaływania słabe i elektromagnetyczne muszą być jakoś związane.

Wystartujmy z lagrangianu, który oprócz symetrii $U(1)$ ma symetrię $SU(2)$ (Yang, Mills 1954):

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{bmatrix}.$$

$$U = e^{-i\vec{\alpha}(x) \cdot \vec{\tau}}$$

a transformacja cechowania zawiera oprócz macierzy U czynnik fazowy $U(1)$:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)\tau_0} U \Phi,$$

gdzie τ_0 jest dwuwymiarową macierzą jednostkową. Pochodna kowariantna:

$$D_\mu = \partial^\mu + i\frac{g_1}{2}B_\mu + i\frac{g_2}{2}\mathbf{W}_\mu, \quad (3)$$

gdzie

$$\mathbf{W}_\mu = \sum_k W_\mu^k \tau^k. \quad (4)$$

Symetria $SU(2) \times U(1)$ – próżnia

Funkcję V wybieramy jak poprzednio

$$\begin{aligned} V(\Phi^\dagger\Phi) &= \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2]^2 \\ &= \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 - \phi_0^2]^2. \end{aligned}$$

Minima leżą na trójwymiarowej sferze $V = 0$. Wybierając jako stan próżni jeden konkretny punkt na powierzchni tej sfery, łamiemy spontanicznie symetrię w trzech kierunkach (a nie jak poprzednio w jednym), czyli – gdybyśmy mieli do czynienia z symetrią globalną – spodziewalibyśmy się trzech bezmasowych bozonów Goldstone’a. Dla transformacji lokalnej zawsze możemy tak wybrać fazy aby stan próżni był rzeczywisty i miał postać

$$\Phi_{\text{vac}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{bmatrix},$$

Symetria $SU(2) \times U(1)$ – wzbudzenia i symetria rezydualna

Wzbudzenia opisane polem h prostopadłym do powierzchni $V = 0$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x) \end{bmatrix}.$$

Taki wybór stanu próżni dopuszcza rezydualną transformację cechowania:

$$\Phi' = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x) \end{bmatrix} = \Phi.$$

Macierz

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= e^{-i\varphi(x)/2} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi(x)/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\varphi(x)/2} \end{bmatrix} \\ &= e^{-i\varphi(x)/2} e^{-i\varphi(x)\tau_3/2} \\ &= e^{-i\varphi(x)/2} U_3(\varphi(x)/2) \end{aligned} \tag{5}$$

jest transformacją $U(1) \in U(1) \times SU(2)$ angażującą obie te grupy równocześnie.
→ elektromagnetyzm.

Symetria $SU(2) \times U(1)$ – potencjał i człon kinetyczny

Lagrangian

$$\mathcal{L}_\Phi = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi)$$

Przy naszym wyborze Φ_{vac} :

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = m^2 h^2 + \frac{m^2}{\sqrt{2}\phi_0} h^3 + \frac{m^2}{8\phi_0^2} h^4.$$

Pierwszy człon wraz z członem kinetycznym (patrz niżej) składa się na jedno pole skalarne h o masie $\sqrt{2}m$.

Wprowadźmy pola W_μ^\pm :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\mu &= \sum_k W_\mu^k \boldsymbol{\tau}^k \\ &= \begin{bmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Symetria $SU(2) \times U(1)$
 pochodna kowariantna działająca na Φ

$$\begin{aligned}
 D_\mu \Phi &= \left(\partial_\mu + i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} \mathbf{W}_\mu \right) \Phi \\
 &= \left(\partial_\mu + i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} \begin{bmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + h/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_\mu h/\sqrt{2} \end{bmatrix} + i \frac{g_1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ B_\mu (\phi_0 + h/\sqrt{2}) \end{bmatrix} + i \frac{g_2}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} W_\mu^+ \\ -W_\mu^3 \end{bmatrix} (\phi_0 + h/\sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

Aby obliczyć człon kinetyczny musimy $D_\mu \Phi$ podnieść do kwadratu (pamiętając o sprzężeniu hermitowskim).

Symetria $SU(2) \times U(1)$ człon kinetyczny

Człon kinetyczny zawiera człon mieszający pola B_μ i W_μ^3 :

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \left\{ \frac{g_1^2}{4} B^\mu B_\mu - \frac{g_1 g_2}{2} B^\mu W_\mu^3 + \frac{g_2^2}{4} W^{3\mu} W_\mu^3 \right\} \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right)^2$$

$$+ \frac{g_2^2}{2} W^{-\mu} W_\mu^+ \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right)^2$$

Aby lagrangian przyjął formę kanoniczną trzeba *zdiagonalizować* formę kwadratową w nawiasie $\{ \dots \}$ (opuszczamy indeksy μ):

$$\begin{bmatrix} B & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ W^3 \end{bmatrix}$$

definiując nowe pola A i Z poprzez wprowadzenie tzw. kąta Weinberga:

$$B = A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W,$$

$$W^3 = Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W,$$

Symetria $SU(2) \times U(1)$ foton i Z^0

$$\begin{aligned} B &= A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W, \\ W^3 &= Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} B & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ W^3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_1^2 + g_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ Z \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \left\{ \frac{g_1^2}{2} W^{-\mu} W_\mu^+ + \frac{(g_1^2 + g_2^2)}{4} Z^\mu Z_\mu \right\} \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right)^2.$$

Symetria $SU(2) \times U(1)$ masy bozonów pośredniczących i cząstki Higgsa

$$\begin{aligned}M_W &= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 g_2, \\M_Z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}, \\M_h &= \sqrt{2} m.\end{aligned}$$

Masa cząstki Higgsa nie da się obliczyć bez znajomości parametru m .

Symetria $SU(2) \times U(1)$ – stopnie swobody

Podsumujmy otrzymany wynik licząc stopnie swobody przed i po złamaniu symetrii:

- Przed złamaniem symetrii
 1. Φ : dublet $SU(2)$ zespolonych pól skalarnych – 4
 2. B_μ : jedno bezmasowe pole wektorowe $U(1)$ – 2
 3. \mathbf{W}_μ : trzy bezmasowe pola wektorowe $SU(2)$ – 6W sumie: **12** stopni swobody.
- Po złamaniu symetrii:
 1. h : masywne rzeczywiste pole skalarne (Higgs) – 1
 2. A_μ : foton, bezmasowe pole wektorowe – 2
 3. Z_μ : masywne, neutralne pole wektorowe – 3
 4. W_μ^\pm : dwa masywne pola wektorowe – 6W sumie: **12** stopni swobody.

Symetria $SU(2) \times U(1)$ masy bozonów pośredniczących i cząstki Higgsa c.d.

Człony kinetyczne dla pól cechowania, sprzężenia do fermionów \rightarrow

$$e = g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W.$$

Związek ten wprowadza ograniczenia na parametry teorii.

$$M_W = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 g_2 = 80,385 \pm 0,015 \text{ GeV},$$

$$M_Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV}$$

co daje

$$\cos \theta_W = \frac{M_W}{M_Z} = 0,8815 \rightarrow \sin^2 \theta_W = 0,2229.$$

Wartość $\phi \sim 180 \text{ GeV}$. Mechanizm Higgsa nie przewiduje konkretnej wartości masy cząstki Higgsa. Dziś wiemy, że

$$M_h = \sqrt{2}m = 125,09 \pm 0,24 \text{ GeV}, \quad (6)$$

ale ten wynik wymagał wielkiego programu badawczego zrealizowanego w ośrodku CERN przy użyciu akceleratora LHC.