

19 Oddziaływania elektroslabe - fermiony

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, jak rozwiązać problem nadania masy bozonom pośredniczącym poprzez spontaniczne złamanie symetrii cechowania $U(1) \times SU(2)$. Teraz do opisanej w poprzednim rozdziale teorii musimy dołączyć fermiony. Napotkamy na dwa problemy: po pierwsze musimy tak skonstruować sprzężenia fermionów do bozonów W^\pm i Z^0 , aby była łamana parzystość, ale sprzężenie do fotonu musi parzystość zachowywać. Po drugie musimy uwzględnić skomplikowaną strukturę ładunków elektrycznych: leptony mają ładunek całkowity, kwarki ułamkowy, a neutrina są neutralne.

Zacznijmy od problemu parzystości. Zapiszmy równanie Diraka

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m)\psi = 0. \quad (19.1)$$

przy użyciu chiralnej reprezentacji macierzy $\vec{\alpha}$ i β i rozkładając bispinor Diraka na dwa spinory Weyla:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19.2)$$

Wówczas równanie Diraka jest równoważne dwóm równaniom:

$$(i\partial_t - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi_L - m\psi_R = 0, \quad (i\partial_t + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi_R - m\psi_L = 0. \quad (19.3)$$

Widzimy, że dla fermionów bezmasowych, $m = 0$, są to dwa niezależne równania na $\psi_{L,R}$. Dlatego możemy zapostulować różne prawa transformacji dla spinorów lewoskrętnych ψ_L i prawoskrętnych ψ_R . Obie te składowe możemy otrzymać z bispinora Diraka ψ przy użyciu operatorów rzutowych

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$$

gdzie macierz γ_5 w reprezentacji chiralnej (19.2) ma postać

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19.4)$$

Warto w tym miejscu zauważyć, że równanie Diraka (19.1) możemy dostać z zasady wariacyjnej, jeżeli przyjąć gęstość Lagrange'a w postaci

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger (i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m)\psi = \psi^\dagger \beta (i\partial_t - m)\psi = \bar{\psi} (i\partial_t - m)\psi \quad (19.5)$$

przeprowadzając wariację względem ψ^\dagger lub alternatywnie względem $\bar{\psi}$. Z powodu niezachowania parzystości warto zapisać (19.5) z użyciem spinorów Weyla $\psi_{L,R}$:

$$\mathcal{L} = \psi_L^\dagger (i\partial_t - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi_L + \psi_R^\dagger (i\partial_t + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L). \quad (19.6)$$

Jeżeli $m = 0$ wówczas ψ_L i ψ_R są niezależnymi polami. Wprowadzając „czterowektory”

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}), \quad \partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla}), \quad \partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla}).$$

mamy gęstość Lagrange'a w postaci:

$$\mathcal{L} = i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L). \quad (19.7)$$

Dla cząstek oddziaływujących musimy zastąpić zwykłą pochodną przez pochodną kowariantną: $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$.

19.1 Leptony

19.1.1 Prawa transformacji

Teraz zapostulujemy prawa transformacji leptonów ze względu na grupę $U(1) \times SU(2)$. Zaczniemy od grupy $SU(2)$ i rozważymy tylko pierwszą generację, tj. elektron i odpowiadające mu neutrino. Dla pozostałych generacji prawa transformacji są identyczne. Definiujemy dublet leptonowy:

$$L = \begin{bmatrix} L_A \\ L_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}.$$

który względem grupy $SU(2)$ transformuje się identycznie jak dublet pól Higgsa Φ :

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = U\Phi, \\ L &\rightarrow L' = UL, \\ U &= e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}}. \end{aligned} \quad (19.8)$$

Prawoskrętne leptony nie transformują się względem grupy $SU(2)$:

$$e_R \rightarrow e'_R = e_R, \quad \nu_{eR} \rightarrow \nu'_{eR} = \nu_{eR}.$$

Zanim zajmiemy się transformacją $U(1)$, napiszmy pochodną kowariantną działającą na lewoskrętne leptony, którą oznaczymy falką dla odróżnienia od pochodnej kowariantnej działającej na pole Φ :

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \mathbf{W}_\mu \right) \Phi, \\ \tilde{D}_\mu L &= \left(\partial_\mu + i\frac{g'}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \mathbf{W}_\mu \right) L. \end{aligned} \quad (19.9)$$

Stała g_2 jest taka sama jak dla Φ , ale g' trzeba tak dobrać, żeby foton nie sprzęgał się z neutrino. Mamy

$$\tilde{D}_\mu L = \begin{bmatrix} \partial_\mu + i\frac{g'}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} W_\mu^3 & i\frac{g_2}{2} \sqrt{2} W_\mu^+ \\ i\frac{g_2}{2} \sqrt{2} W_\mu^- & \partial_\mu + i\frac{g'}{2} B_\mu - i\frac{g_2}{2} W_\mu^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}. \quad (19.10)$$

Przepiszemy teraz (19.10) używając pól fizycznych:

$$B = A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W, \quad W^3 = Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W.$$

Element w górnym lewym rogu macierzy (19.10)

$$\begin{aligned} g'B + g_2 W^3 &= g'(A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W) + g_2(Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W) \\ &= A(g' \cos \theta_W + g_2 \sin \theta_W) + Z(-g' \sin \theta_W + g_2 \cos \theta_W) \end{aligned} \quad (19.11)$$

nie powinien zawierać pola A :

$$g' \cos \theta_W + g_2 \sin \theta_W = 0. \quad (19.12)$$

Pamiętając, że

$$g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W = e \quad (19.13)$$

otrzymujemy

$$g' = -g_1. \quad (19.14)$$

Oznacza to, że transformacja $U(1)$ działa na leptony z fazą przeciwną do transformacji dla pola Φ . Stąd pełna transformacja $U(1) \times SU(2)$ przyjmuje postać

$$L \rightarrow L' = e^{i\theta(x)} U(x) L. \quad (19.15)$$

Przepisując (19.10) z uwzględnieniem (19.12) otrzymujemy jednoznaczne wyrażenia na sprzężenia pól cechowania do leptonów (pamiętajmy, że gęstość Lagrange'a zawiera człon $\bar{L} \tilde{D}_\mu L$):

$$\tilde{D}_\mu L = \begin{bmatrix} \partial_\mu - i \frac{e}{\sin 2\theta_W} Z_\mu & i \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} W_\mu^+ \\ i \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} W_\mu^- & \partial_\mu - ie A_\mu - ie \cot 2\theta_W Z_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}. \quad (19.16)$$

Jeżeli chodzi o pola prawoskrętne, to w modelu standardowym, gdzie neutrino są bezmasowe, neutrino prawoskrętne nie podlega żadnej transformacji i nie sprzęga się do bozonów pośredniczących. Elektron prawoskrętny jest singletem $SU(2)$, więc sprzęga się tylko do pola $U(1)$, tzn. pola B_μ i pochodna kowariantna przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \check{D}_\mu e_R &= \left(\partial_\mu + i \frac{g''}{2} B_\mu \right) e_R \\ &= \left(\partial_\mu + i \frac{g''}{2} (A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W) \right) e_R, \end{aligned} \quad (19.17)$$

gdzie g'' jest nową stałą sprzężenia. Elektron ma ładunek $-e$, więc

$$\frac{g''}{2} \cos \theta_W = -e \quad \rightarrow \quad -\frac{g''}{2} \sin \theta_W = e \tan \theta_W \quad (19.18)$$

i ostatecznie

$$\check{D}_\mu e_R = (\partial_\mu - ie A_\mu + ie \tan \theta_W Z_\mu) e_R. \quad (19.19)$$

Związek (19.18) implikuje

$$g'' = -2g_1, \quad (19.20)$$

co oznacza, że prawo transformacji dla pól prawych przyjmuje postać

$$\begin{aligned} e_R &\rightarrow e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R, \\ \nu_{eR} &\rightarrow \nu'_{eR} = \nu_{eR}. \end{aligned}$$

19.1.2 Człony masowe

Patrząc na gęstość Lagrange'a (19.6) widzimy, że człony masowe powinny mieć postać typu

$$e_R^\dagger e_L + e_L^\dagger e_R,$$

ale wyrażenie to nie jest niezmiennicze ze względu na transformację $U(1) \times SU(2)$. Możemy natomiast skonstruować człony niezmiennicze, które zawierają pole Φ . Przypomnijmy prawa transformacji $U(1) \times SU(2)$ wszystkich pól, jakie mamy do dyspozycji:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x) \Phi, \quad L \rightarrow L' = e^{i\theta(x)} U(x) L, \quad e_R \rightarrow e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R.$$

Zastanówmy się, jakie mogą być człony niezmiennicze (ze względu na transformację $U(1) \times SU(2)$ i transformację Lorentza):

$$L^\dagger \Phi \rightarrow \text{niezmiennik } SU(2), \text{ ale dostaje fazę } U(1): e^{-i2\theta(x)}$$

$$(L^\dagger \Phi) e_R \rightarrow \text{niezmiennik } SU(2) \times U(1)$$

Zatem niezmienniczy lagrangian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^e &= -\lambda_e \left\{ (L^\dagger \Phi) e_R + e_R^\dagger (\Phi^\dagger L) \right\} \\ &= -\lambda_e \left\{ \Phi_A (\nu_{eL}^\dagger e_R) + \Phi_B (e_L^\dagger e_R) + \Phi_A^\dagger (e_R^\dagger \nu_{eL}) + \Phi_B^\dagger (e_R^\dagger e_L) \right\} \end{aligned} \quad (19.21)$$

gdzie użyliśmy

$$L = \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{bmatrix}.$$

Stała λ_e zwana sprzężeniem Yukawy jest *całkowicie dowolna*. Ponieważ w cechowaniu unitarnym

$$\Phi_A = 0, \quad \Phi_B = \phi_0 + h(x)/\sqrt{2} \quad (19.22)$$

otrzymujemy człony masowe i oddziaływanie pola Higgsa z leptonami:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^e = -\lambda_e \phi_0 \left\{ (e_L^\dagger e_R) + (e_R^\dagger e_L) \right\} - \frac{\lambda_e \phi_0}{\sqrt{2}} h \left\{ (e_L^\dagger e_R) + (e_R^\dagger e_L) \right\}.$$

Masa elektronu wynosi zatem

$$m_e = \lambda_e \phi_0, \quad \text{gdzie } \phi_0 = 180 \text{ GeV} \quad (19.23)$$

co wymaga bardzo małej stałej Yukawy: $\lambda_e \sim 10^{-6}$. Powtarzając analogiczną konstrukcję dla μ i dla τ otrzymujemy

$$\lambda_e \sim 10^{-6}, \quad \lambda_\mu \sim 10^{-3}, \quad \lambda_\tau \sim 10^{-2}. \quad (19.24)$$

Arbitralność sprzężeń Yukawy i ich duży rozrzut jest do dziś nierozwiązanym problemem w modelu standardowym.

19.2 Kwarki

19.2.1 Prawa transformacji

Prawa transformacji kwarków znajdujemy dokładnie tą samą metodą, jak to zrobiliśmy dla leptonów. Zakładamy, że lewe kwarki tworzą dublety ze względu na grupę SU(2)

$$L = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} - \text{dublet SU(2)},$$

a kwarki prawoskrętne są singletami:

$$u_R, d_R - \text{singlety SU(2)}.$$

Pamiętajmy, że ładunki kwarków są ułamkowe:

$$q_{\text{up}} = +\frac{2}{3}e \text{ dla } u, c, t \quad q_{\text{down}} = -\frac{1}{3}e \text{ dla } d, s, b. \quad (19.25)$$

Dlatego, dla pierwszej generacji¹ pochodna kowariantna przyjmuje postać:

$$D_\mu L = \begin{bmatrix} \partial_\mu + i\frac{g_1}{6}B_\mu + i\frac{g_2}{2}W_\mu^3 & i\frac{g_2}{2}\sqrt{2}W_\mu^+ \\ i\frac{g_2}{2}\sqrt{2}W_\mu^- & \partial_\mu + i\frac{g_1}{6}B_\mu - i\frac{g_2}{2}W_\mu^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix}. \quad (19.26)$$

Rozpisując równanie (19.26) w bazie pól fizycznych A oraz Z przekonamy się, że sprzężenia z fotonami respektują (19.25). Prawa transformacji dla pól prawych ze względu na transformację U(1) można napisać niemalże „od ręki”, tak jak to zrobiliśmy dla prawoskrętnego elektronu, mając na względzie (19.25):

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)}U(x)\Phi,$$

$$L \rightarrow L' = e^{-i\theta(x)/3}U(x)L,$$

$$u_R \rightarrow u'_R = e^{-i4\theta(x)/3}u_R,$$

$$d_R \rightarrow d'_R = e^{+i2\theta(x)/3}d_R. \quad (19.27)$$

Te prawa transformacji stosują się do pozostałych dwóch generacji

$$L_2 = \begin{bmatrix} c_L \\ s_L \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} t_L \\ b_L \end{bmatrix} - \text{dublety SU(2)}, \\ c_R, s_R, t_R, b_R - \text{singlety SU(2)}. \quad (19.28)$$

¹Pochodna kowariantna dla pozostałych dwóch generacji jest identyczna.

19.2.2 Człony masowe

Człony masowe dla kwarków „dolnych” $d_k = d, s$ oraz b możemy napisać kopiując lagragian dla naładowanych leptonów:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{d\text{Higgs}} &= - \sum_{k=1}^3 \left[\lambda_k^d \left(L_k^\dagger \Phi \right) d_{kR} + \lambda_k^{d*} d_{kR}^\dagger (\Phi^\dagger L_j) \right] \\ &\rightarrow -\phi_0 \sum_{k=1}^3 \left[\lambda_k^d d_{kL}^\dagger d_{kR} + \lambda_k^{d*} d_{kR}^\dagger d_{kL} \right] \quad \text{człon masowy} \end{aligned} \quad (19.29)$$

gdzie wprowadziliśmy trzy arbitralne stałe Yukawy λ_k^d oraz $d_{kL} = (d_L, s_L, b_L)$. W przypadku leptonów był to jedyny przyczynik do mas, gdyż przyjęliśmy, że neutrina są bezmasowe. Tu jednak musimy dodatkowo wygenerować masy kwarkom $u_k = u, c, t$. Oczywiście problem z masami dla kwarków „górnych” bierze się stąd, że stan próżni ma postać

$$\Phi_{\text{vac}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{bmatrix}.$$

Żeby nadać masy kwarkom u_k musimy w jakiś sposób odwrócić kolejność kwarków w dublecie

$$L = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} \rightarrow L_1 = \begin{bmatrix} d_L \\ u_L \end{bmatrix}$$

nie niszcząc własności transformacyjnych ze względu na grupę SU(2). W tym celu użyjemy tensora Levi-Civity, który w notacji macierzowej ma postać

$$\varepsilon_{jk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^2 = -\mathbf{1}, \quad \varepsilon \varepsilon^T = 1. \quad (19.30)$$

Utwórzmy „odwrócony” dublet (uwaga na znak minus!):

$$L_\varepsilon = \varepsilon L = \begin{bmatrix} d_L \\ -u_L \end{bmatrix}. \quad (19.31)$$

Zbadajmy jak transformuje się L_ε . W tym celu skorzystamy z tożsamości:

$$U^T \varepsilon U = \varepsilon \det U = \varepsilon. \quad (19.32)$$

Rzeczywiście

$$U^T \varepsilon U = \begin{bmatrix} 0 & u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12} \\ u_{21}u_{12} - u_{11}u_{22} & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon \det U. \quad (19.33)$$

Ponieważ $\det U = 1$ tensor ε jest niezmiennikiem transformacji ortogonalnej $U^T \varepsilon U$. Stąd wynika, że człony niezmiennicze mają postać:

$$u_R^\dagger (\Phi^T \varepsilon L) \rightarrow u_R^\dagger e^{i4\theta(x)/3} (e^{-i\theta(x)} \Phi U^T \varepsilon U L e^{-i\theta(x)/3}) = u_R^\dagger (\Phi^T \varepsilon L), \quad (19.34)$$

gdzie użyliśmy praw transformacji (19.27). Zatem niezmienniczy człon masowy dla kwarków u_k przyjmuje postać (uwaga na znak minus!)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{u \text{ Higgs}} &= - \sum \left[\lambda_k^u \left(L_k^\dagger \varepsilon \Phi^* \right) u_{kR} - \lambda_k^{u*} u_{kR}^\dagger (\Phi^T \varepsilon L_k) \right] \\ &\rightarrow -\phi_0 \sum \left[\lambda_k^u u_{kL}^\dagger u_{kR} + \lambda_k^{u*} u_{kR}^\dagger u_{kL} \right] \quad \text{człon masowy}\end{aligned}\quad (19.35)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie $u_{kL} = (u_L, c_L, t_L)$. Nadanie masy kwarkom u_k wymagało wprowadzenia kolejnych trzech arbitralnych stałych Yukawy.

19.2.3 Mieszanie kwarków

Dotychczas zakładaliśmy, że człony masowe i człony oddziaływania (pochodne kowariantne) są diagonalne w przestrzeni rodzajów kwarków (ang. *flavors*). Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, aby kwarki o tych samych ładunkach mieszały się. To oznacza, że stany własne operatora masy i oddziaływań słabych byłyby różne. Okazuje się, że tak właśnie się dzieje. Aby takie mieszanie opisać zamienimy występujące we wzorach (19.29) i (19.35) stałe Yukawy przez macierze Yukawy

$$\lambda_k \rightarrow \Lambda_{jk}.$$

Wówczas człony masowe przyjmują postać

$$\mathcal{L}_{q \text{ mass}} = -\phi_0 \sum \left[\Lambda_{jk}^d d_{jL}^\dagger d_{kR} + \Lambda_{jk}^{d*} d_{kR}^\dagger d_{jL} \right] - \phi_0 \sum \left[\Lambda_{jk}^u u_{jL}^\dagger u_{kR} + \Lambda_{jk}^{u*} u_{kR}^\dagger u_{jL} \right]. \quad (19.36)$$

Macierze Λ^d oraz Λ^u można zdiagonalizować (zwróćmy uwagę na to, że diagonalizacja odbywa się przy pomocy czterech różnych macierzy unitarnych):

$$\phi_0 \Lambda_{jk}^d = \mathcal{D}_L^\dagger M^d \mathcal{D}_R, \quad \phi_0 \Lambda_{jk}^u = \mathcal{U}_L^\dagger M^u \mathcal{U}_R, \quad (19.37)$$

gdzie

$$M^d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{bmatrix}, \quad M^u = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{bmatrix}. \quad (19.38)$$

Definiujemy nowe pola

$$\begin{aligned}d'_{jL} &= (\mathcal{D}_L)_{jk} d_{kL}, & d'_{jR} &= (\mathcal{D}_R)_{jk} d_{kR}, \\ u'_{jL} &= (\mathcal{U}_L)_{jk} u_{kL}, & u'_{jR} &= (\mathcal{U}_R)_{jk} u_{kR},\end{aligned}\quad (19.39)$$

dla których człon masowy jest diagonalny (opuściliśmy primy):

$$\mathcal{L}_{q \text{ mass}} = - \sum_{j=d,s,b} \left[m_j^d \left(d'_{jL}^\dagger d_{jR} + d'_{jR}^\dagger d_{jL} \right) \right] - \sum_{j=u,c,t} \left[m_j^u \left(u'_{jL}^\dagger u_{jR} + u'_{jR}^\dagger u_{jL} \right) \right]. \quad (19.40)$$

Transformacja (19.39) poprzez wyrażenie $\bar{L}D_L$ (patrz (19.7)), gdzie D_μ jest dane przez (19.26), zmienia sprzężenia do bozonów pośredniczących. Nas będą interesowały człony poza diagonalną, które są odpowiedzialne za sprzężenia bozonów W_μ^\pm do kwarków. Oddziaływanie to ma postać

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{qW} &= -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\sum_k[(u_{kL}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu d_{kL})W_\mu^+ + (d_{kL}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu u_{kL})W_\mu^-] \\ &= -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\sum_{i,j,k}\underbrace{(\mathcal{U}_L)_{ik}(\mathcal{D}_L^\dagger)_{kj}}_{V_{ij}}(u_{iL}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu d'_{jL})W_\mu^+ + \underbrace{(\mathcal{D}_L)_{jk}(\mathcal{U}_L^\dagger)_{ki}}_{V_{ij}^\dagger}(d'_{jL}\tilde{\sigma}^\mu u'_{iL})W_\mu^-\end{aligned}\quad (19.41)$$

gdzie użyliśmy transformacji odwrotnej do (19.39). Współczynnik przed sumami w tym równaniu bierze się z relacji (19.13) oraz (19.12). Widzimy, że uniwersalne sprzężenie $e/\sqrt{2}\sin\theta_W$ jest mnożone przez macierz unitarną V , której indeksy numerują generacje fermionów:

$$V_{ij} = (\mathcal{U}_L)_{ik}(\mathcal{D}_L^\dagger)_{kj}. \quad (19.42)$$

Macierz V nazywa się macierzą Cabibbo-Kobayashi-Maskawy.

19.2.4 Macierz CKM

Równanie (19.41) wygodniej zapisać w nieco bardziej czytelny sposób (znowu opuściliśmy primy):

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\begin{bmatrix} u_L^\dagger & c_L^\dagger & t_L^\dagger \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix}\tilde{\sigma}^\mu\begin{bmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{bmatrix}W_\mu^+ + \text{h.c.} \quad (19.43)$$

Znajdziemy teraz liczbę parametrów, od których zależy macierz V . Rozumowanie przebiega podobnie do dyskutowanego już przypadku parametryzacji macierzy $SU(N)$. Załóżmy, że mamy nie 3 generacje a n . W takim przypadku unitarna macierz zespolona $n \times n$ ma n^2 rzeczywistych stopni swobody. Z kolei macierz ortogonalna $n \times n$ zależy od $n(n-1)/2$ rzeczywistych kątów:

$$\begin{aligned}U &\rightarrow n^2 \\ O &\rightarrow \frac{1}{2}n(n-1) \\ \text{różnica} &\rightarrow \frac{1}{2}n(n+1)\end{aligned}$$

Stąd macierz unitarna $n \times n$ ma $n(n+1)/2$ faz. Pola kwarkowe zdefiniowane są z dokładnością do fazy, a zatem macierze U_L i D_L są wyznaczone z dokładnością to trzech faz każda:

$$\mathcal{U}_L \rightarrow \begin{bmatrix} e^{i\alpha_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_t} \end{bmatrix}\mathcal{U}_L, \quad \mathcal{D}_L \rightarrow \begin{bmatrix} e^{i\beta_d} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta_b} \end{bmatrix}\mathcal{D}_L. \quad (19.44)$$

Taka transformacja zamienia

$$V_{ij} = \left(\mathcal{U}_L \mathcal{D}_L^\dagger \right)_{ij} \rightarrow e^{i(\alpha_i - \beta_j)} V_{ij}. \quad (19.45)$$

W naszym przypadku mamy $2n$ faz pól kwarkowych (n „dolnych” i n „górných”), ale ponieważ do elementów macierzy V wchodzi tylko różnice $\alpha_i - \beta_j$, pozwala to na wyeliminowanie $2n - 1$ faz. Wiąże się to z tym, że transformacja

$$\alpha_i \rightarrow \alpha_i + \delta, \beta_i \rightarrow \beta_i + \delta \quad (19.46)$$

nie wpływa na zmianę V . Stąd jednej fazy nie da się wyeliminować. Zostaje zatem

$$\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \right) - (2n - 1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{2}{2} = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) \quad (19.47)$$

faz. Podsumowując, macierz V ma

$$\begin{aligned} \text{parametrów rzeczywistych: } & \frac{1}{2}n(n - 1) \rightarrow [\text{U}(2) = 1, \text{U}(3) = 3] \\ \text{faz: } & \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) \rightarrow [\text{U}(2) = 0, \text{U}(3) = 1] \end{aligned}$$

W teorii z dwoma generacjami mamy jeden kąt mieszania, wspomniany na początku kąt Cabibbo. W teorii z trzema generacjami mamy 3 kąty i jedną fazę. Faza daje przyczynek do łamania symetrii kombinowanej \mathcal{CP} .

Macierz CKM zwykle się parametryzuje w następujący sposób

$$\begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix} \quad (19.48) \end{aligned}$$

gdzie

$$s_{ij} = \sin \theta_{ij}, \quad c_{ij} = \cos \theta_{ij}$$

Mamy 3 kąty: θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} oraz jedną fazę δ . Wartości numeryczne modułów elementów macierzy CKM (19.49) wykazują hierarchię: największe elementy są na diagonalii, a potem im dalej diagonalii, tym są mniejsze (podkreślenia wskazują miejsce dziesiętne, na którym pojawia się błąd doświadczalny): $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \leq 1$.

$$|V_{\text{CKM}}| = \begin{bmatrix} \mathbf{0.97421} & \mathbf{0.2243} & \mathbf{0.00394} \\ \mathbf{0.218} & \mathbf{0.997} & \mathbf{0.0422} \\ \mathbf{0.0081} & \mathbf{0.0394} & \mathbf{1.019} \end{bmatrix} \quad (19.49)$$

Teraz, kiedy już wiemy, że neutrino mają masę, analogiczna macierz Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) opisuje mieszanie neutrin, z tym że wszystkie kąty mieszania są duże.

Unitarność macierzy V_{CKM} narzuca pewne związki na jej elementy. Rozpatrzmy sprzężone równanie na zero w prawym górnym rogu iloczynu

$$V_{\text{CKM}}^\dagger V_{\text{CKM}} = \begin{bmatrix} V_{ud}^* & V_{cd}^* & V_{td}^* \\ V_{us}^* & V_{cs}^* & V_{ts}^* \\ V_{ub}^* & V_{cb}^* & V_{tb}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (19.50)$$

które przyjmuje postać

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = \mathbf{0}. \quad (19.51)$$

Jeżeli suma trzech liczb zespolonych jest równa zero, to tworzą one trójkąt na dwuwymiarowej płaszczyźnie zespolonej. Zwróćmy uwagę, że (19.51) ma elementy zespolone (a nie rzeczywiste) tylko gdy faza $\delta \neq 0$. Przyjęło się używać znormalizowanej formy równania (19.51) :

$$1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = 0. \quad (19.52)$$

Jest ono schematycznie pokazane poniżej. Jednym z testów modelu standardowego są precyzyjne pomiary kątów tego *trójkąta unitarności* i sprawdzanie, czy trójkąt się rzeczywiście domyka.

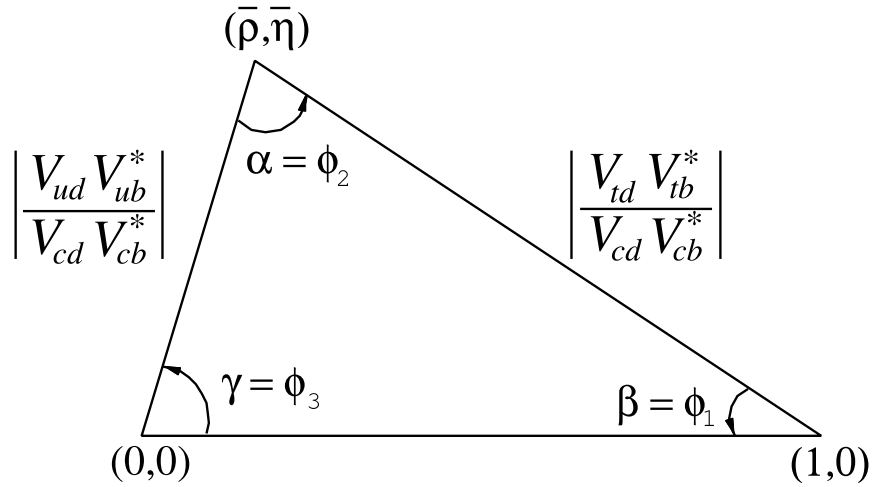


Figure 11.1: Sketch of the unitarity triangle.