

18 Oddziaływania elektroślabe - bozony pośredniczące

18.1 Uwagi wstępne

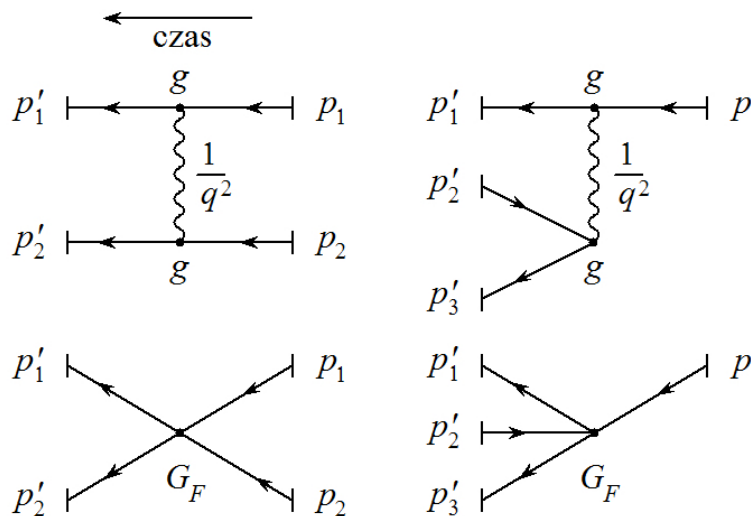
O ile dyskutowane w poprzednich rozdziałach oddziaływania silne były w zasadzie nieabelową kopią elektrodynamiki, o tyle opis oddziaływań słabych (a jak się zaraz przekonamy – elektroślabych) wymaga szeregu modyfikacji w porównaniu do stosunkowo prostej chromodynamiki. Chcielibyśmy oddziaływania słabe opisać przy pomocy teorii z symetrią cechowania opartą o jakąś grupę unitarną. Jest dość oczywiste, że grupa ta powinna zawierać podgrupę $SU(2)$, gdyż podstawowym procesem zachodzącym przez oddziaływania słabe jest rozpad beta neutronu:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e.$$

Ponieważ neutron i proton stanowią dublet izospinowy, grupa $SU(2)$ jest tu naturalnym kandydatem. Dziś wiemy, że proces rozpadu neutronu zachodzi na poziomie elementarnym poprzez rozpad kwarku d

$$d \rightarrow u + e + \bar{\nu}_e.$$

Symetria $SU(2)$ wymaga istnienia trzech bozonów pośredniczących, dwa z nich muszą mieć ładunek elektryczny, ponieważ proces rozpadu słabego nie tylko zmienia typ kwarku, ale też jego ładunek.



Rysunek 18.1: Procesy rozpraszania i rozpadu w teorii z symetrią cechowania i w teorii Fermiego.

Enrico Fermi zaproponował w latach 1933-34 teorię rozpadu beta opartą o oddziaływanie cztero-fermionowe, a więc bez wprowadzania bozonów pośredniczących. Różnica pomiędzy teorią opartą o grupę cechowania a teorią Fermiego pokazana jest na Rysunku

18.1. Teoria Fermiego wymagała wprowadzenia stałej wymiarowej, G_F , zwaną stałą Fermiego, która określa siłę oddziaływań słabych, $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. W teorii z symetrią cechowania występuje bezwymiarowa (w jednostkach naturalnych) stała sprzężenia g oraz propagator bozonu pośredniczącego $1/q^2$, co sugeruje

$$G_F \sim g^2 \frac{1}{q^2}, \quad (18.1)$$

gdzie $q = p'_1 - p$. Jednak dla niskoenergetycznych procesów rozpadu beta G_F nie zależy od q . Ten paradoks przez długie lata stanowił jeden z podstawowych problemów teorii słabych oddziaływań. Z jednej strony teoria Fermiego działała dobrze tylko w najniższym rzędzie rachunku zaburzeń, gdyż w wyższych rzędach pojawiały się nieskończoności, których nie dało się jednoznacznie usunąć, z drugiej strony symetria cechowania gwarantuje, że bozony pośredniczące są bezmasowe (fotony i gluony nie mają masy). Gdyby bozony pośredniczące miały masę, wówczas

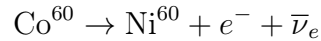
$$G_F \sim g^2 \frac{1}{q^2} \rightarrow g^2 \frac{1}{q^2 - M^2} \underset{q^2 \ll M^2}{\sim} -g^2 \frac{1}{M^2} \quad (18.2)$$

i problem byłby rozwiązany. Okazało się, że można – co na ogół jest niemożliwe – zjeść ciastko i mimo tego ciągle mieć ciastko, dzięki mechanizmowi Higgsa, który polega na tym, że teoria posiada dokładną symetrię cechowania, natomiast stan próżni (a więc stan o najniższej energii, a nie stan gdzie wszystkie pola znikają) łamie tę symetrię, tak że bozony pośredniczące dostają masę (tzw. spontaniczne naruszenie symetrii). Dlaczego chcemy startować z teorii z symetrią, a następnie łamać tę symetrię poprzez stan próżni, zamiast od razu poświęcić postulat symetrii cechowania i „ręcznie” dopisać człony masowe dla bozonów pośredniczących? Symetria cechowania bardzo restrykcyjnie określa, jakiego typu oddziaływania są w danej teorii dozwolone i nawet po jej spontanicznym złamaniu te restrykcje są zachowane. Gdyby od początku nie przejmować się symetrią cechowania, teoria nie miałaby ograniczeń i w zasadzie nie byłaby zdolna do sformułowania konkretnych przewidywań, które możnaby zweryfikować doświadczalnie.

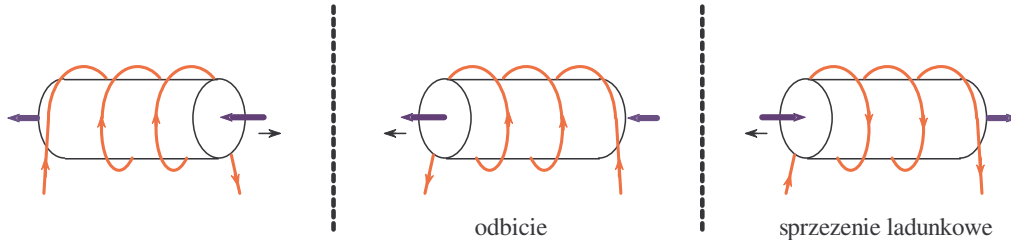
Ponieważ bozony pośredniczące w rozpadzie beta są naładowane, muszą oddziaływać elektromagnetycznie. To oznacza, że teoria oddziaływań słabych powinna być w jakiś sposób połączona z elektrodynamiką, a więc z teorią cechowania opartą na grupie $U(1)$. Rzeczywiście, grupa symetrii którą zapostulujemy do opisu oddziaływań *elektrosłabych* to $SU(2) \times U(1)$. Jednakże, jak się zaraz okaże, występująca tu grupa $U(1)$ nie jest grupą elektromagnetyzmu. Będziemy mieli do czynienia z mieszaniem bozonu pośredniczącego związanego z grupą $U(1)$ i nienaładowanego bozonu pośredniczącego z grupy $SU(2)$. Dopiero taką „mieszankę” zinterpretujemy jako foton, a ortogonalną do niej kombinację jako bozon Z^0 . Choć na pierwszy rzut oka taki mechanizm wygląda dość skomplikowanie, to daje on bardzo dobre przewidywania na masy naładowanych bozonów pośredniczących, masę bozonu Z^0 oraz gwarantuje bezmasowość fotonu.

Następną komplikacją związaną z oddziaływaniami słabymi był wynik doświadczenia przeprowadzonego w roku 1957 przez panią Chien-Shiung Wu z Columbia University w

Nowym Jorku, który wskazywał, że oddziaływania słabe łamią parzystość. W tym doświadczeniu badano rozpad beta w spolaryzowanej próbce jąder Co^{60} (w tym celu trzeba było umieścić tę próbkę w temperaturze 1 K, aby ruchy termiczne nie zniszczyły polaryzacji, co wymagało niezwykłej jak na te czasy biegłości):



Zaobserwowano, że większa liczba elektronów była emitowana w kierunku przeciwnym do kierunku polaryzacji. Aby zrozumieć, że taki niejednorodny rozkład liczby emitowanych elektronów jest sygnałem łamania parzystości, rozważmy schematyczny układ eksperymentalny pokazany na Rysunku 18.2, gdzie jądra kobaltu są polaryzowane poprzez zewnętrzne pole magnetyczne uzyskane przy pomocy cewki z prądem. Odbicie przestrzenne względem płaszczyzny prostopadłej do wektora polaryzacji przetrzuca elektrony emitowane w prawo na lewą stronę. Jednakże kierunek polaryzacji się nie zmienia, gdyż prąd w cewce płynie dalej wokół cewki z tą samą skrętnością. Zatem wynik lustrzanego odbicia eksperymentu Wu byłby przeciwny do eksperymentu wyjściowego. Dopiero sprzężenie ładunkowe, które zamienia płynące w cewce elektrony na pozytony, odwróciłoby kierunek pola magnetycznego, a tym samym kierunek polaryzacji jąder kobaltu. Eksperyment Wu sugeruje, że oddziaływania słabe łamią parzystość przestrzenną P , ale zachowują kombinowaną symetrię CP . Jednakże w roku 1964 James Cronin i Val Fitch odkryli łamanie CP badając rozpady neutralnych kaonów. Jeżeli przyjąć, co wydaje się dziś pewnikiem, że wszystkie prawa fizyki zachowują symetrię CPT , to łamanie CP implikuje łamanie symetrii odbicia w czasie.



Rysunek 18.2: Schematyczna ilustracja eksperymentu C.S. Wu. Płynący w cewce zgodnie z ruchem wskazówek zegara prąd indukuje pole magnetyczne wzdłuż osi cewki, które polaryzuje jądra kobaltu. Odbicie przestrzenne nie zmienia kierunku przepływu prądu wokół cewki, ale przetrzuca elektrony emitowane w prawo na lewą stronę. Dopiero zmiana ładunku nośników prądu zmienia kierunek polaryzacji i przywraca pierwotny rozkład elektronów względem wektora polaryzacji.

Na tym jednak nie kończą się niespodzianki związane z oddziaływaniami słabymi. W roku 1963 Nicola Cabibbo zapostulował, że rozpad beta w którym kwark d przechodzi w kwark u , tak naprawdę zachodzi między kwarkiem u a pewną kombinacją kwarków d i s ¹:

$$d' = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \quad (18.3)$$

¹W rzeczywistości mieszanie jest bardziej skomplikowane, gdyż obejmuje trzy generacje kwarków.

gdzie kąt mieszania zwany kątem Cabibbo wynosi $\theta_C = 13,15^\circ$.

Największą zagadką rozpadu beta od razu zauważoną na początku XX wieku, było – jak się wówczas wydawało – niezachowanie energii. Dopiero zaproponowanie w roku 1930 przez Wolfganga Pauliego neutrina unoszącego brakującą energię, rozwiązało ten problem. Przez wiele lat uważano, że neutrina są bezmasowe, dopiero zapoczątkowane przez Raymonda Davisa pod koniec 60. XX wieku badania neutrin słonecznych doprowadziły do konkluzji, że neutrina muszą mieć masy i mieszają się podobnie do kwarków, z tym że kąty mieszania są większe. Nie jest jasne jaki mechanizm nadaje masy neutrinom. Do wygenerowania mas kwarków można użyć mechanizmu Higgsa, co jednocześnie umożliwia mieszanie kwarków.

Podsumujmy zatem główne własności oddziaływań słabych:

- oddziaływania słabe oparte są o grupę cechowania $SU(2) \times U(1)$,
- symetria cechowania jest złamana spontanicznie poprzez mechanizm Higgsa, co powoduje, że bozony pośredniczące mają masę,
- neutralny bozon pośredniczący z grupy $SU(2)$ i bozon pośredniczący z grupy $U(1)$ mieszają się tworząc dwie ortogonalne kombinacje odpowiadające bezmasowemu fotonowi i masywnemu bozonowi Z^0 ,
- sprzężenia bozonów cechowania grupy $SU(2)$ do kwarków i leptonów łamią parzystość,
- masy kwarków generowane są przez mechanizm Higgsa,
- sprzężenia kwarków do bozonów W^\pm nie są diagonalne w przestrzeni rodzajów (zapachów, ang. *flavor'ów*) kwarków,
- mieszanie zachodzi także dla neutrin, które nie są bezmasowe.

19 Prosty model o symetrii $U(1)$

Zanim przejdziemy do opisu oddziaływań słabych rozważmy prosty model o symetrii $U(1)$. W tym celu musimy wprowadzić pojęcie *gęstości Lagrange'a* dla teorii pola w analogii do mechaniki klasycznej. Przypomnijmy, że w mechanice klasycznej zasada najmniejszego działania (czyli minimalizacja funkcjonału S)

$$S = \int_0^T dt L(x, \dot{x})$$

Omawiane tutaj mieszanie zapostulowane zostało zanim odkryto kwark c , nie mówiąc już o cząstkach trzeciej generacji.

proceedzi do równań ruchu

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

W najprostszym przypadku cząstki w jakimś potencjale równania te są równaniami na jej trajektorię.

W teorii pola używamy analogicznej zasady do wyznaczania równań falowych, o których mówiliśmy na początku wykładu. Definiujemy gęstość Lagrange'a, która jest funkcją pól i ich pochodnych. W interesującym nas tu przypadku pola skalarnego

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi); \quad x \rightarrow \varphi, \quad \frac{dx}{dt} \rightarrow \partial_0 \varphi, \quad (19.4)$$

gdzie pole φ odgrywa rolę położenia w mechanice klasycznej, a jego pochodna czasowa rolę prędkości. Minimalizacja (19.4) prowadzi do równań ruchu

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0. \quad (19.5)$$

Łatwo przekonać się, że dla gęstości Lagrange'a danej wzorem (przyjmujemy $\hbar = 1$ i $c = 1$):

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^2). \quad (19.6)$$

równanie (19.5) jest równaniem Kleina-Gordona. Widzimy zatem, że dla pola skalarnego – w ogólności dla bozonów – współczynnik przy kwadracie pola jest równy masie reprezentowanej przez to pole cząstki. Oczywiście gęstość Lagrange'a może zawierać wyższe potęgi pola φ , które odpowiadają za samoodziaływanie i na ogół traktuje się je jako zaburzenie.

19.1 Globalna symetria U(1), twierdzenie Goldstone'a

Rozważmy teraz zespolone pole skalarne:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2). \quad (19.7)$$

i wybierzmy odpowiadającą mu gęstość Lagrange'a w postaci

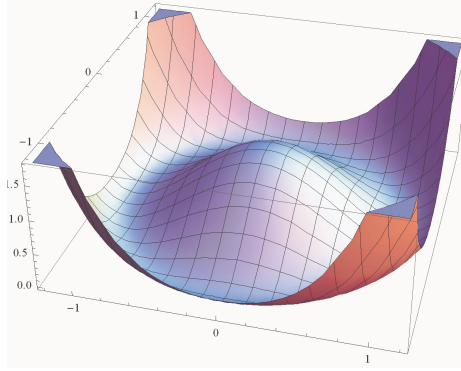
$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (19.8)$$

gdzie zamiast członu masowego użyliśmy pewnej funkcji V , która jest funkcją modułu pola Φ . Taka gęstość Lagrange'a jest niezmiennicza ze względu na globalną transformację U(1):

$$\Phi \rightarrow e^{-i\alpha} \Phi. \quad (19.9)$$

Wybierzmy teraz funkcję V w postaci

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2]^2, \quad (19.10)$$



Rysunek 19.3: Potencjał (19.10) o kształcie meksykańskiego kapelusza dla teorii zespolonego pola skalarnego.

gdzie ϕ_0 i m są pewnymi stałymi o wymiarze masy. Funkcja ta w układzie współrzędnych (ϕ_1, ϕ_2) jest zilustrowana na Rysunku 19.3. Widzimy, że minimum funkcji V plasuje się na okręgu

$$\frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) = \phi_0^2 \quad (19.11)$$

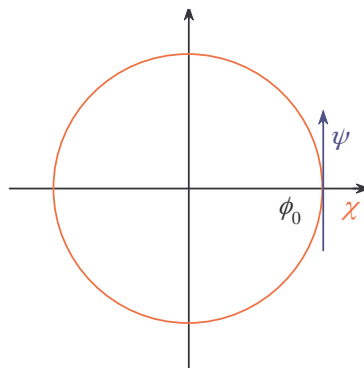
a nie w $\Phi = 0$. Jednak system musi wybrać jakiś jeden konkretny punkt w dolinie potencjału (19.11) i w ten sposób symetria $U(1)$ zostaje *spontanicznie* złamana. Wybierzmy stan próżni jako

$$\Phi_0 = (\phi_0, 0) \quad (19.12)$$

i wprowadźmy pola *dynamiczne* χ oraz ψ

$$\Phi = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi(x) + i\psi(x)). \quad (19.13)$$

co zilustrowane jest na Rysunku (19.4).



Rysunek 19.4: Dwa wzbudzenia wokół próżni (19.12), ψ w kierunku symetrii potencjału i χ w kierunku prostopadłym.

Przepiszmy gęstość Lagrange'a (19.8) w nowych zmiennych

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left[\sqrt{2}\phi_0\chi + \frac{1}{2}\chi^2 - \frac{1}{2}\psi^2 \right]^2 \quad (19.14)$$

Podnosząc nawias [...] do kwadratu otrzymujemy

$$[\dots]^2 = 2\phi_0^2\chi^2 + \text{wyższe potęgi}. \quad (19.15)$$

Wyższe potęgi pól χ i ψ to oddziaływanie, które skrótowo oznaczymy jako \mathcal{L}_{int} . Mamy więc

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - m^2\chi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (19.16)$$

W wyniku spontanicznego złamania globalnej symetrii U(1) otrzymaliśmy teorię dwóch pól skalarnych: jednego masywnego i jednego bezmasowego. Zauważmy, że bezmasowe pole ψ , to wzbudzenie w kierunku doliny potencjału, a więc w kierunku symetrii, która została złamana przez wybór konkretnego stanu próżni. Ten wynik jest ilustracją ogólnego twierdzenia Goldstone'a, które mówi, że w przypadku łamania symetrii (także wyżej wymiarowych) na każdy złamany kierunek przypada bezmasowa cząstka zwana *bozonem Goldstone'a*. Na koniec zauważmy, że człony oddziaływania, których znalezienie pozostawiamy czytelnikowi, mają określoną formę, która jest dyktowana przez symetrię wyjściowego lagrangianu.

19.2 Lokalna symetria U(1), mechanizm Higgsa

Teraz zażądamy aby wyjściowa symetria U(1) (19.9) została zastąpiona przez symetrię *lokalną*

$$\Phi \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\Phi. \quad (19.17)$$

Zgodnie z naszymi rozważaniami z poprzednich wykładów teoria taka będzie niezmiennicza ze względu transformację (19.17), jeżeli pochodną cząstkową zastąpimy przez pochodną kowariantną. Oznacza to, że gęstość Lagrange'a dla teorii z lokalną symetrią cechowania U(1) przyjmie postać:

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu - igA_\mu)\Phi^\dagger][(\partial^\mu + igA^\mu)\Phi] - V(\Phi^\dagger\Phi) + \dots, \quad (19.18)$$

gdzie kropki oznaczają dodatkowy człon kinetyczny dla pola wektorowego A_μ , który nie będzie nas tu interesował. Potencjał V jest identyczny jak w poprzednim przypadku (19.10). Zasadnicza różnica z poprzednim przypadkiem jest taka, że czynnik fazowy pola Φ , który teraz zależy od x , możemy zawsze tak wybrać, żeby *w każdym punkcie* $\Phi(x)$ było rzeczywiste (tzw. cechowanie unitarne, ang. *unitary gauge*). Wówczas pole dynamiczne opisujące wzbudzenia wokół stanu próżni (19.12) ma postać

$$\Phi(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x), \quad h(x) - \text{rzeczywiste} \quad (19.19)$$

i nie zawiera wzbudzenia ψ w kierunku urojonym. Tak jak poprzednio, gęstość Lagrange'a możemy podzielić na część swobodną i część opisującą oddziaływanie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (19.20)$$

gdzie

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 + g^2 \phi_0^2 A_\mu A^\mu + \dots \quad (19.21)$$

Widzimy, że otrzymaliśmy system z jednym masywnym polem skalarnym h oraz z polem wektorowym z członem masowym proporcjonalnym do średniej próżniowej pola Φ i stałej sprzężenia g . Kropki w równaniu (19.21) oznaczają człon kinetyczny dla pola wektorowego A_μ .

Zauważmy, że przed złamaniem symetrii mieliśmy 4 stopnie swobody:

- bezmasowe pole wektorowe – 2 stopnie swobody,²
- zespolone pole skalarne – 2 stopnie swobody,

a po złamaniu symetrii mamy:

- masowe pole wektorowe – 3 stopnie swobody,³
- jedno skalarne pole rzeczywiste – 1 stopień swobody.

Zjawisko zamiany jednego pola skalarnego na masę pola wektorowego nosi nazwę mechanizmu Higgsa, a pole skalarne h nazywamy polem Higgsa. Mechanizm Higgsa pozwala obejść twierdzenie Goldstone'a, które przewiduje istnienie bezmasowych cząstek w przypadku spontanicznego łamania symetrii. Ponieważ oprócz fotonu (i gluonów) w przyrodzie nie ma cząstek bezmasowych, Peter Higgs a także Francois Englert, Robert Brout, Tom Kibble, Carl R. Hagen i Gerald Guralnik szukali metody, aby takie ominięcie twierdzenia Goldstone'a znaleźć. Oczywiście twierdzenie matematyczne można obejść jedynie poprzez zmianę założeń; tutaj założenie globalnej symetrii zastąpiono przez postulat symetrii lokalnej.

19.3 Łamanie lokalnej symetrii $U(1) \times SU(2)$, model standardowy

Poprzedni, akademicki przykład oparty o symetrię $U(1)$ zawiera wszystkie ważne efekty spontanicznego łamania symetrii, niemniej jednak musimy go nieco rozbudować aby opisać interesujące nas oddziaływania elektroslabe. W tym celu rozważmy dwukomponentowe pole zespolone Φ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{bmatrix}. \quad (19.22)$$

²Foton ma dwie możliwe polaryzacje poprzeczne.

³Masowa cząstka wektorowa może mieć dodatkowo polaryzację podłużną.

Niech U będzie unitarną macierzą 2×2

$$U = e^{-i\vec{\alpha}(x) \cdot \vec{\tau}} \quad (19.23)$$

a transformacja cechowania zawiera oprócz macierzy U czynnik fazowy $U(1)$:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)\tau_0} U \Phi, \quad (19.24)$$

gdzie τ_0 jest dwuwymiarową macierzą jednostkową. Aby gęstość Lagrange'a była niezmiennicza ze względu na transformację (19.24) musimy wprowadzić pochodną kowariantną z czterema polami cechowania: polem B_μ związanym z grupą $U(1)$ i trzema polami W_μ^k , $k = 1, 2, 3$ związanymi z grupą $SU(2)$:

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g_1}{2}B_\mu + i\frac{g_2}{2}\mathbf{W}_\mu \quad (19.25)$$

gdzie

$$\mathbf{W}_\mu = \sum_k W_\mu^k \tau^k. \quad (19.26)$$

Ponieważ grupa cechowania jest iloczynem dwóch niezależnych grup $U(1)$ i $SU(2)$, występujące w pochodnej kowariantnej stałe sprzężenia $g_{1,2}$ nie są równe (czynnik $1/2$ jest kwestią konwencji). Niezmiennicza gęstość Lagrange'a

$$\mathcal{L}_\Phi = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (19.27)$$

musi zostać uzupełniona o lagrangian dla pól B_μ oraz W_μ^k . Funkcję V wybieramy jak poprzednio (19.10), z tą różnicą, że jest ona teraz funkcją czterech rzeczywistych pól ϕ_i

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2]^2 \quad (19.28)$$

$$= \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 - \phi_0^2]^2, \quad (19.29)$$

a jej minima leżą na trójwymiarowej sferze $V = 0$. Wybierając jako stan próżni jeden konkretny punkt na powierzchni tej sfery, łamiemy spontanicznie symetrię w trzech kierunkach (a nie jak poprzednio w jednym), czyli – gdybyśmy mieli do czynienia z symetrią globalną – spodziewalibyśmy się trzech bezmasowych bozonów Goldstone'a. Dla transformacji lokalnej zawsze możemy tak wybrać fazy aby stan próżni miał postać

$$\Phi_{\text{vac}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{bmatrix}, \quad (19.30)$$

a wzbudzenia były opisane polem h prostopadłym do powierzchni $V = 0$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x) \end{bmatrix}. \quad (19.31)$$

Taki wybór stanu próżni dopuszcza rezydualną transformację cechowania gdyż (19.31) jest niezmiennicze względem transformacji:

$$\Phi' = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x) \end{bmatrix} = \Phi. \quad (19.32)$$

Macierz

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= e^{-i\varphi(x)/2} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi(x)/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\varphi(x)/2} \end{bmatrix} \\ &= e^{-i\varphi(x)/2} e^{-i\varphi(x)\tau_3/2} \\ &= e^{-i\varphi(x)/2} U_3(\varphi(x)/2) \end{aligned} \quad (19.33)$$

jest transformacją $U(1) \in U(1) \times SU(2)$ angażującą obie te grupy równocześnie. Ponieważ ta transformacja (lokalna) $U(1)$ jest symetrią naszej teorii nawet po spontanicznym złamaniu przez stan próżni (19.30), będzie ona odpowiadała za elektromagnetyzm. Przy takim wyborze Φ :

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = m^2 h^2 + \frac{m^2}{\sqrt{2}\phi_0} h^3 + \frac{m^2}{8\phi_0^2} h^4. \quad (19.34)$$

Pierwszy człon wraz z członem kinetycznym (patrz niżej) składa się na jedno pole skalarne h o masie $\sqrt{2}m$.

Ostatni krok, który został do zrobienia, to obliczenie członu kinetycznego w (19.27). W tym celu wprowadźmy pola W_μ^\pm :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\mu(x) &= \begin{bmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (19.35)$$

W tej notacji pochodna kowariantna przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \mathbf{W}_\mu \right) \Phi \\ &= \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \begin{bmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + h/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_\mu h/\sqrt{2} \end{bmatrix} + i\frac{g_1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ B_\mu (\phi_0 + h/\sqrt{2}) \end{bmatrix} + i\frac{g_2}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}W_\mu^+ \\ -W_\mu^3 \end{bmatrix} (\phi_0 + h/\sqrt{2}). \end{aligned} \quad (19.36)$$

Aby obliczyć człon kinetyczny musimy (19.36) podnieść do kwadratu (pamiętając o sprzężeniu hermitowskim). Wynik jest rzeczywisty i zawiera człon mieszający pola B_μ i W_μ^3 :

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \left\{ \frac{g_1^2}{4} B^\mu B_\mu - \frac{g_1 g_2}{2} B^\mu W_\mu^3 + \frac{g_2^2}{4} W^{3\mu} W_\mu^3 \right\} (\phi_0 + h/\sqrt{2})^2 + \frac{g_2^2}{2} W^{-\mu} W_\mu^+ (\phi_0 + h/\sqrt{2})^2 \quad (19.37)$$

Aby lagrangian przyjął formę kanoniczną trzeba zdiagonalizować formę kwadratową w nawiasie $\{\dots\}$ (opuszczamy indeksy μ):

$$F = \begin{bmatrix} B & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ W^3 \end{bmatrix} \quad (19.38)$$

definiując nowe pola A i Z poprzez wprowadzenie tzw. kąta Weinberga:

$$\begin{aligned} B &= A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W, \\ W^3 &= Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W, \end{aligned} \quad (19.39)$$

który można wyrazić przez stałe sprzężenia $g_{1,2}$:

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (19.40)$$

W tej nowej bazie

$$F = \begin{bmatrix} A & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_1^2 + g_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ Z \end{bmatrix} \quad (19.41)$$

Widać, że współczynnik przy A^2 jest równy zero! Zatem

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \left\{ \frac{g_1^2}{2} W^{-\mu} W_\mu^+ + \frac{(g_1^2 + g_2^2)}{4} Z^\mu Z_\mu \right\} (\phi_0 + h/\sqrt{2})^2. \quad (19.42)$$

Z równania (19.42) wynika, że pola cechowania mają teraz masy

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 g_2, \\ M_Z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}. \end{aligned} \quad (19.43)$$

Pierwiastek $\sqrt{2}$ przy masie W wynika z przyjętej normalizacji pól W^\pm .

Podsumujmy otrzymany wynik licząc stopnie swobody przed i po złamaniu symetrii:

- Przed złamaniem symetrii

1. Φ : dublet $SU(2)$ zespolonych pól skalarnych – 4

2. B_μ : jedno bezmasowe pole wektorowe U(1) – 2
 3. \mathbf{W}_μ : trzy bezmasowe pola wektorowe SU(2) – 6
- W sumie: **12** stopni swobody.

• Po złamaniu symetrii:

1. h : masywne rzeczywiste pole skalarne (Higgs) – 1
 2. A_μ : foton, bezmasowe pole wektorowe – 2
 3. Z_μ : masywne, neutralne pole wektorowe – 3
 4. W_μ^\pm : dwa masywne pola wektorowe – 6
- W sumie: **12** stopni swobody.

Badając człony kinetyczne dla pól cechowania można się przekonać, że ładunek elementarny

$$e = g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W. \quad (19.44)$$

Związek ten wprowadza ograniczenia na parametry teorii. Znając doświadczalne wartości mas bozonów W i Z możemy obliczyć kąt Weinberga

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 g_2 = 80,385 \pm 0,015 \text{ GeV}, \\ M_Z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (19.45)$$

co daje

$$\cos \theta_W = \frac{M_W}{M_Z} = 0,8815 \rightarrow \sin^2 \theta_W = 0,2229. \quad (19.46)$$

Masa bozonu Higgosa $M_h = \sqrt{2}m$ wymaga dodatkowo znajomości parametru m , który nie wchodzi do wzorów na masy W i Z . Stąd mechanizm Higgosa nie przewiduje konkretnej wartości masy cząstki Higgosa. Dziś wiemy, że

$$M_h = \sqrt{2}m = 125,09 \pm 0,24 \text{ GeV}, \quad (19.47)$$

ale ten wynik wymagał wielkiego programu badawczego zrealizowanego w ośrodku CERN przy użyciu akceleratora LHC.