

9 Reprezentacja dołączona

Zanim przejdziemy do podania ogólnych zasad znajdowania i konstrukcji wyżej wymiarowych nieredukowalnych reprezentacji grupy $SU(3)$, zauważmy, że niejako „za darmo” mamy jedną ośmiowymiarową reprezentację, zwaną reprezentacją dołączoną (ang. *adjoint*). Rozważmy tożsamość Jacobiego

$$[T_m, [T_n, T_l]] + [T_n, [T_l, T_m]] + [T_l, [T_m, T_n]] = 0 \quad (9.1)$$

z której wynika, że macierze $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$

$$\left(T_l^{\text{adj}}\right)_{mn} = -if_{lmn} \quad (9.2)$$

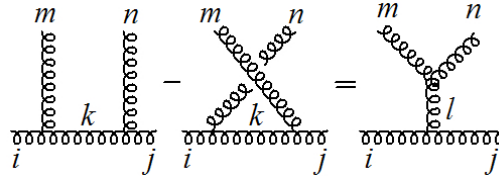
spełniają reguły komutacji. Taką reprezentację nazywa się *reprezentacją dołączoną* (*adjoint*). Dla $SU(2)$ jest to reprezentacja spinu 1, a dla $SU(3)$ oktet. Ze wzoru (9.2) wynika, że

$$-T_l^{\text{adj}*} = T_l^{\text{adj}} \quad (9.3)$$

czyli, że jest to reprezentacja samosprężona. Dlatego w graficznej reprezentacji generatorów na linii falistej, odpowiadającej indeksowi m nie ma strzałki. Używając uprzednio zdefiniowanej notacji graficznej dla symboli if_{mij} , relację komutacji

$$\begin{aligned} [T_m^{\text{adj}}, T_m^{\text{adj}}]_{ij} &= if_{mni}(T_l^{\text{adj}})_{ij} \\ &= (-if_{mik})(-if_{nkj}) - (-if_{nik})(-if_{mkj}) = if_{mni}(-if_{lij}) \end{aligned} \quad (9.4)$$

można graficznie przedstawić w następujący sposób:



Żaden generator (9.2) nie jest diagonalny. Zatem, aby przejść do standardowej bazy, w której $N - 1$ generatorów jest diagonalnych musimy wykonać transformację unitarną. Jawną formę tej transformacji podamy w dalszej części wykładu.

10 Szereg Clebscha-Gordana dla grupy $SU(3)$, diagramy Younga

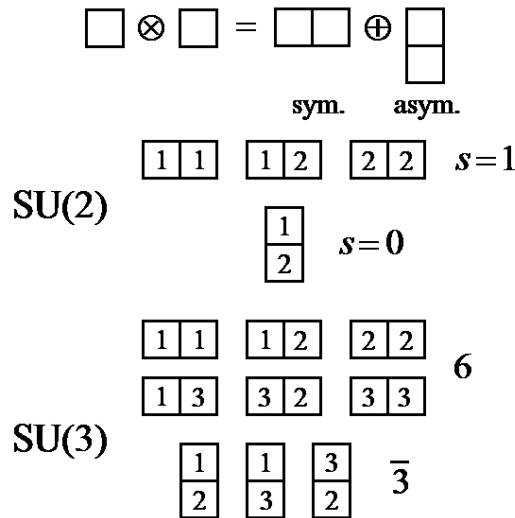
Wszystkie wyżej wymiarowe reprezentacje grupy $SU(3)$ otrzymujemy tworząc iloczyn tensorowy reprezentacji $\mathbf{3}$ oraz $\bar{\mathbf{3}}$ (ogólniej \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$). Takie iloczyny nie są nieredukowalne i rozkładu na reprezentacje nieredukowalne dokonuje się poprzez symetryzowanie i

antysymetryzowanie indeksów tensorowych. Rozważmy iloczyn dwóch reprezentacji fundamentalnych:

$$q_a^{(1)} q_b^{(2)} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(q_a^{(1)} q_b^{(2)} - q_b^{(1)} q_a^{(2)} \right)}_{A_{ab}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(q_a^{(1)} q_b^{(2)} + q_b^{(1)} q_a^{(2)} \right)}_{S_{ab}}. \quad (10.5)$$

Widzimy, że iloczyn ten można przedstawić jako sumę tensora antysymetrycznego A_{ab} , który ma $N(N-1)/2$ niezależnych elementów oraz tensora symetrycznego S_{ab} o $N(N+1)/2$ elementach. Dla $N=2$ dostajemy zatem reprezentacje o wymiarach 1 i 3, a więc o spinach 0 i 1. Dla $N=3$ mamy reprezentację o wymiarze 3, jak się przekonamy jest to $\bar{\mathbf{3}}$ oraz 6. Można udowodnić (czego tu nie robimy), że tensory A_{ab} i S_{ab} transformują się niezależnie, a więc rzeczywiście odpowiadają dwóm nieredukowalnym reprezentacją grupy $SU(3)$.

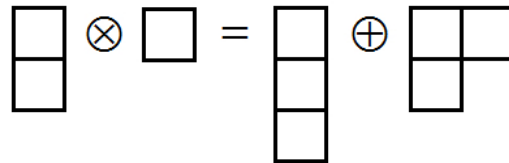
Zamiast dokonywać symetryzacji i antysymetryzacji na indeksach tensorowych, będziemy się posługiwać diagramami Younga. Diagramy te składają się z kratek (komórek), które oznaczają wektor reprezentacji fundamentalnej. Na diagramach Younga iloczyn symetryczny dwóch komórek oznacza się rysując je poziomo jedną obok drugiej, a antysymetryzacja jest wtedy, gdy umieszczamy je w pionie (Rys. 10.1).



Rysunek 10.1: Diagramy Younga dla iloczynu dwóch reprezentacji fundamentalnych.

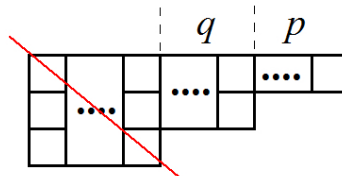
Kolumny w diagramach Younga mają maksymalny wymiar N , gdyż jest to największa liczba indeksów reprezentacji fundamentalnej grupy $SU(N)$, którą można zantysymetryzować (symbol $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ jest niezmiennikiem grupy $SU(N)$). N wymiarowa kolumna odpowiada zatem singletowi (nie transformuje się względem transformacji $SU(N)$). Zilustrujmy to na przykładzie iloczynu tensorowego $\bar{\mathbf{3}}$ i $\mathbf{3}$ pokazanego na rysunku 10.2. Do dwuelementowej kolumny reprezentującej $\bar{\mathbf{3}}$ musimy dopisać komórkę reprezentującą $\mathbf{3}$. Możemy to zrobić na dwa sposoby. Dopisanie na spód $\bar{\mathbf{3}}$ skutkuje powstaniem całkowicie

antysymetrycznego iloczynu trzech pól kwarkowych, czyli singletu. Tego zresztą należało się spodziewać w rozkładzie reprezentacji $\bar{\mathbf{3}}$ i $\mathbf{3}$. Druga możliwość polega na dopisaniu komórki w pierwszym wierszu (w pierwszym wierszu, gdyż zawarte w diagramach Younga symetryzacje i antysymetryzacje powodują, że w tym przypadku dopisanie w drugim wierszu byłoby „podwójnym liczeniem”). W ten sposób powstaje reprezentacja o mieszanej symetrii. Ponieważ nie mamy już możliwości dopisania komórki reprezentującej kwark, w iloczynie $\bar{\mathbf{3}}$ i $\mathbf{3}$ pojawia się singlet i – przez proste odjęcie stopni swobody – reprezentacja ośmiowymiarowa: oktet, a więc dyskutowana wcześniej reprezentacja dołączona.



Rysunek 10.2: Diagramy Younga dla iloczynu $\bar{\mathbf{3}}$ i $\mathbf{3}$.

Te dwa przykłady pozwalają zrozumieć uogólnienie na bardziej skomplikowane przypadki. „Generyczny” diagram Younga dla grupy $SU(3)$ składa się z p kolumn o jednej komórce, q kolumn o dwóch komórkach i pewnej liczbie kolumn o 3 komórkach, które wykreślamy, tak jak to jest pokazane na rysunku 10.3, gdyż reprezentują one singlety. Poszczególne wiersze w diagramach Younga mają uporządkowane długości: wiersz drugi nie może być dłuższy od pierwszego, itd. W ten sposób uzyskujemy nową możliwość etykietowania reprezentacji grupy $SU(3)$ w formie (p, q) . Ponieważ, jak widzieliśmy na przykładzie z Rys. 10.1 dwukomórkowa kolumna odpowiada reprezentacji antytrypletowej, popularna i nieściśła interpretacja pary (p, q) sprowadza się do tego, że jest to reprezentacja złożona z p kwarków i q antykwarków.



Rysunek 10.3: „Generyczny” diagram Younga dla grupy $SU(3)$.

Mając dane te dwie liczby p i q możemy obliczyć wymiar danej reprezentacji

$$\dim(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2), \quad (10.6)$$

i wartość operatora Casimira

$$C_2(p, q) = \mathbf{T}^2 = p + q + \frac{1}{3}(p^2 + q^2 + pq). \quad (10.7)$$

Widać, że:

$$\mathbf{3} = (1, 0), \quad \bar{\mathbf{3}} = (0, 1). \quad (10.8)$$

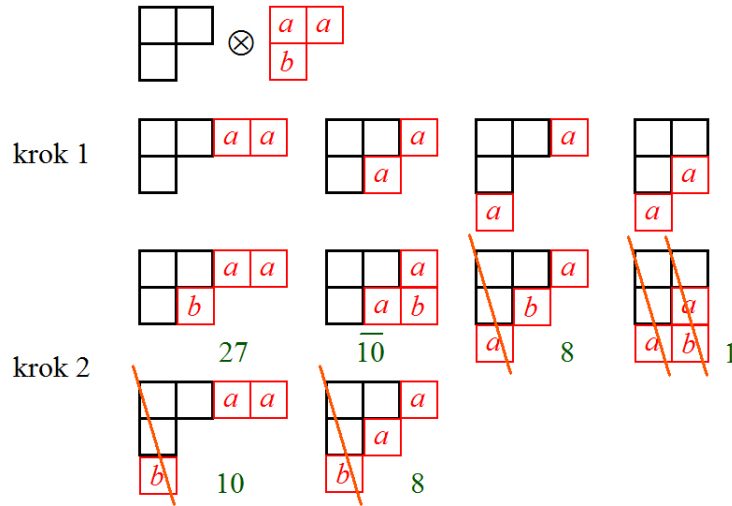
Zwyczajowo używa się obu zapisów na oznakowanie reprezentacji: wymiaru \mathbf{w} i $\bar{\mathbf{w}}$ (czasami \mathbf{w}^*) lub (p, q) .

Zauważmy, że ogólnie reprezentacji sprzężonej do danej reprezentacji (p, q) odpowiada diagram dopełniający ją do singletu:

$$\overline{(p, q)} = (q, p).$$

Zatem, jeżeli $p = q$ reprezentacja jest *samosprzężona*.

Diagramy Younga są bardzo pomocne w konstruowaniu szeregu Clebscha-Gordana dla grupy $SU(3)$ (czy ogólnie $SU(N)$). Rysujemy diagramy Younga dla reprezentacji, które chcemy pomnożyć: $(p_1, q_1) \otimes (p_2, q_2)$. W drugim diagramie wszystkie komórki w pierwszym wierszu oznaczamy przez a , a komórki w drugim wierszu przez b . Następnie wszystkie komórki a z pierwszego rzędu dodajemy do diagramu (p_1, q_1) , tak aby nie były one w jednej kolumnie. W ten sposób generujemy kilka nowych diagramów Younga, do których dodajemy komórki b , tak aby nie były one w jednej kolumnie (i tak aby były spełnione ogólne zasady konstrukcji diagramów Younga: drugi wiersz nie może być dłuższy od pierwszego, a trzeci od drugiego, kolumny mogą mieć co najwyżej 3 komórki) i aby spełniony był dodatkowy warunek: idąc wzdłuż wierszy diagramu Younga od prawej do lewej i od góry do dołu, liczba napotkanych komórek a musi być równa lub większa od liczby komórek b . Na końcu wykreślamy wszystkie singlety i obliczamy wymiar reprezentacji przy pomocy wzoru (10.6).



Rysunek 10.4: Mnożenie dwóch reprezentacji dołączonych grupy $SU(3)$ przy pomocy diagramów Younga.

Procedura ta jest zilustrowana na rysunku 10.4, gdzie skonstruowano szereg C-G:

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}_1 \oplus \mathbf{8}_2 \oplus \mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{27}. \quad (10.9)$$

Widzimy, że w tym szeregu pojawiają się dwa różne oktety.

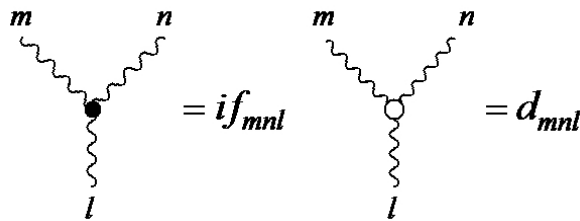
Istnienie dwóch oktetów jest pewną nowością a także trudnością w porównaniu z grupą SU(2). Przypomnijmy sobie ważny wzór na mnożenie dwóch macierzy Pauliego:

$$\tau_m \tau_n = \delta_{mn} \mathbf{1} + i \varepsilon_{mnl} \tau_l. \quad (10.10)$$

Analogiczny wzór na mnożenie dwóch macierzy Gell-Manna zawiera dodatkowy człon:

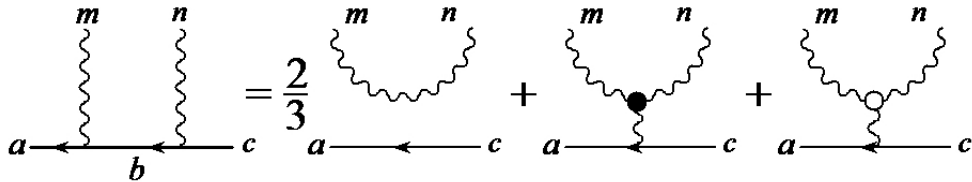
$$\lambda_m \lambda_n = \frac{2}{3} \delta_{mn} \mathbf{1} + i f_{mnl} \lambda_l + d_{mnl} \lambda_l. \quad (10.11)$$

Stałe d_{mnl} są tensorami całkowicie symetrycznymi. Warto za Cvitanowiciem wprowadzić notację graficzną pokazaną na rysunku 10.5 . Wówczas równanie (10.11) daje się



Rysunek 10.5: Graficzna notacja dla f_{mnl} oraz d_{mnl} .

„narysować” jak na rysunku 10.6.



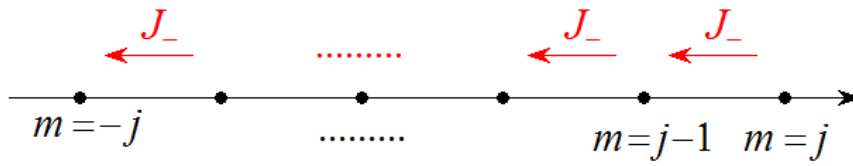
Rysunek 10.6: Graficzna reprezentacja równania (10.11).

11 Konstrukcja reprezentacji grupy SU(3)

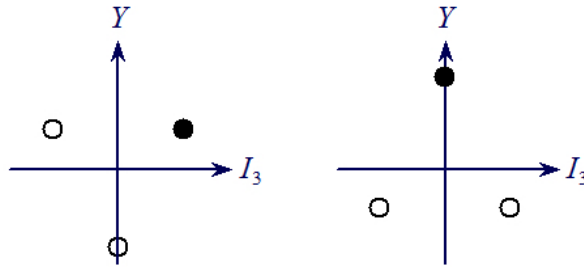
Przypomnijmy sobie, że dla grupy SU(2) konstruowaliśmy stany danej reprezentacji (czyli określonego momentu pędu j) za pomocą operatorów J_{\pm}

$$J_{\pm} = J_1 \pm i J_2, \quad J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle. \quad (11.12)$$

Wybieraliśmy stan anihilowany przez J_+ , a więc $|j, j\rangle$ i następnie działaliśmy operatorem J_- tyle razy, aż dostawaliśmy 0, tak jak to pokazano na Rys. 11.7.



Rysunek 11.7: Działanie operatora J_- na diagramie wagowym grupy $SU(2)$. Stan $|j, j\rangle$ anihilowany przez J_+ nazywamy najwyższą wagą.

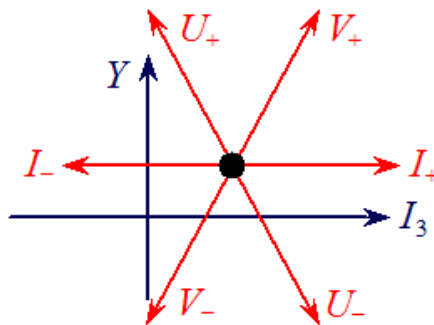


Rysunek 11.8: Reprezentacja trypletowa i antytrypletowa grupy $SU(3)$.

Patrząc na diagramy wagowe reprezentacji $\mathbf{3}$ oraz $\bar{\mathbf{3}}$ pokazane na rysunku 11.8 widzimy, że potrzebujemy więcej operatorów typu J_{\pm} , aby skonstruować wszystkie stany tych reprezentacji. Rzeczywiście dla grupy $SU(3)$ definiujemy sześć takich operatorów:

$$I_{\pm} = T_1 \pm iT_2, \quad V_{\pm} = T_4 \pm iT_5, \quad \hat{U}_{\pm} = T_6 \pm iT_7. \quad (11.13)$$

Ich działanie jest schematycznie pokazane na rysunku 11.9. Stan anihilowany przez I_+ , V_+ oraz U_+ nazywamy najwyższą wagą. Na Rys. 11.8 stany te zostały oznaczone czarną kropką.



Rysunek 11.9: Działanie operatorów I_{\pm} , V_{\pm} i U_{\pm} na diagramie wagowym grupy $SU(3)$.

Patrząc na Rys. 11.8 widzimy, że operatory I_{\pm} nie zmieniają Y (są to generatory podgrupy $SU(2)$), natomiast zmieniają I_3 o ± 1 . Z kolei operatory V_{\pm} oraz U_{\pm} zmieniają

Y o ± 1 , a także I_3 o $\pm 1/2$ (i oczywiście całkowite I):

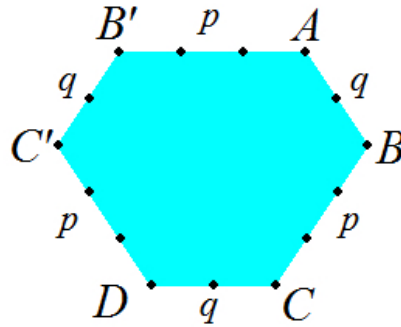
$$\begin{aligned}\hat{V}_\pm \left| \mathcal{R}, Y, I, I_3 \right\rangle &= \alpha_V^\pm \left| \mathcal{R}, Y \pm 1, I + \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2} \right\rangle + \beta_V^\pm \left| \mathcal{R}, Y \pm 1, I - \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \hat{U}_\pm \left| \mathcal{R}, Y, I, I_3 \right\rangle &= \alpha_U^\pm \left| \mathcal{R}, Y \pm 1, I + 1/2, I_3 \mp \frac{1}{2} \right\rangle + \beta_U^\pm \left| \mathcal{R}, Y \pm 1, I - 1/2, I_3 \mp \frac{1}{2} \right\rangle.\end{aligned}\tag{11.14}$$

Wartości stałych α i β podane są w dodatku, \mathcal{R} jest etykietą numerującą daną reprezentację. Patrząc się na wzory (11.14) możemy poczynić ważną obserwację: jednemu punktowi w płaszczyźnie (Y, I_3) może odpowiadać kilka punktów o różnym izospinie I . A zatem w ramach jednej reprezentacji grupy $SU(3)$ możemy mieć kilka multipletów podgrupy izospinowej.

Dla reprezentacji $\mathcal{R} = (p, q)$ najwyższa waga to stan:

$$\left| (p, q) \text{ najwyższa waga} \right\rangle = \left| (p, q), Y = \frac{p+2q}{3}, I = \frac{p}{2}, I_3 = \frac{p}{2} \right\rangle.\tag{11.15}$$

Aby skonstruować diagram wagowy reprezentacji (p, q) musimy operatorami I_- , V_- oraz U_- działać na (11.15) na wszystkie możliwe sposoby, aż otrzymamy zera. W ten sposób tworzymy na płaszczyźnie (Y, I_3) zbiór punktów ograniczony obwiednią, która powstaje w następujący sposób. Na płaszczyźnie (I_3, Y) zaznaczamy punkt A o współrzędnych najwyższej wagi (11.15). Następnie rysujemy q punktów w kierunku U_- . Ostatni z nich oznaczamy jako B . Od punktu B w kierunku V_- rysujemy p punktów – ostatni to C . I wreszcie począwszy od C rysujemy q punktów w kierunku I_- (D). Wracamy do A i w kierunku I_- rysujemy p punktów (B'), dalej q punktów w kierunku V_- (C') i w kołcu p punktów w kierunku U_- trafiając do punktu D . W ten sposób powstaje obwiednia diagramu wagowego, która pokazana jest na rysunku 11.10.

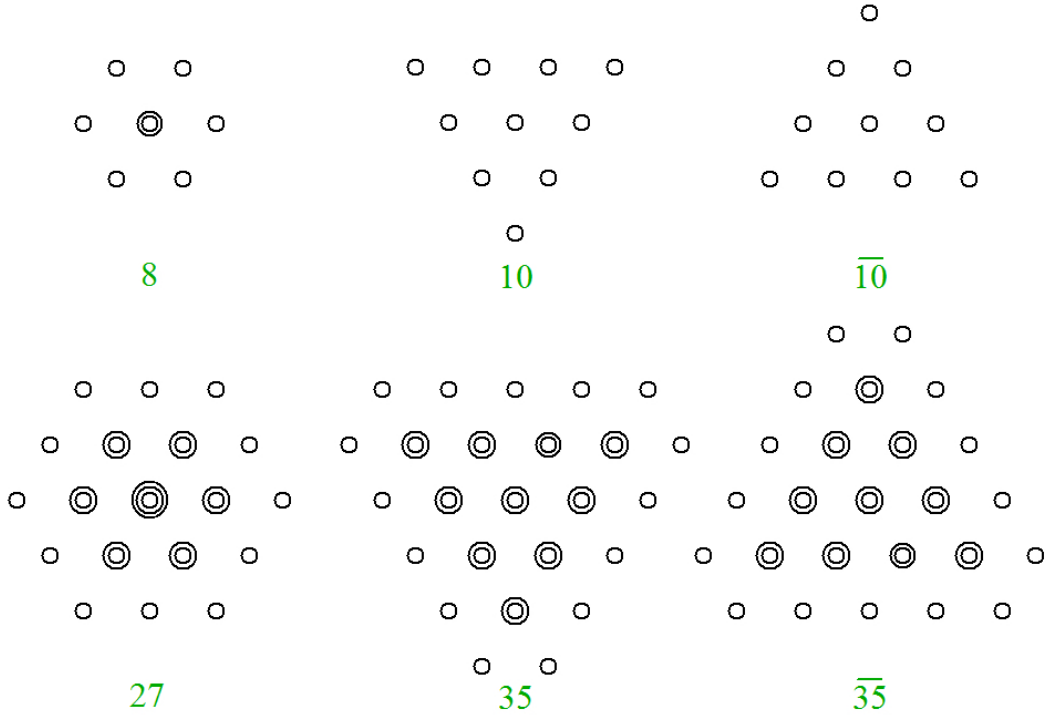


Rysunek 11.10: Obwiednia diagramu wagowego reprezentacji (p, q) . Liczby p oraz q oznaczają liczbę kroków (odcinków) wzdłuż danej krawędzi. Liczba punktów wzdłuż takiej krawędzi jest o jeden większa.

Tak powstały diagram wypełniamy punktami wewnątrz obwiedni zaczynając od punktów wzdłuż łamanej $A - B - C$ i posuwając się w kierunku I_- co jeden. Następnie na

wewnętrznych „szczeblach” (z pominięciem $A-B'$ oraz $C-D$) diagramu dodajemy punkty zdegenerowane o izospinie o 1 mniejszym niż szczebel oryginalny. Tak postępujemy, aż wyczerpią się możliwości dodawania punktów.

Na rysunku 11.11 pokazane są diagramy wagowe reprezentacji $\mathbf{8} = (1, 1)$, $\mathbf{10} = (3, 0)$ i $\overline{\mathbf{10}} = (0, 3)$, które odgrywają istotną rolę w klasyfikacji cząstek. Pokazano także wyższe reprezentacje, gdzie występuje kilkakrotna degeneracja izospinowa niektórych stanów wewnątrz diagramu wagowego.



Rysunek 11.11: Oktet, dekuplet, antydekuplet i wyższe reprezentacje grupy $SU(3)$.

12 Reprezentacja dołączona, ciąg dalszy

Opisana wyżej konstrukcja tworzy bazę, w której diagonalne są operatory I_3 i Y . W jednym z poprzednich rozdziałów podaliśmy jawną postać generatorów reprezentacji dołączonej w bazie, gdzie są one równe stałym struktury grupy pomnożonymi przez $-i$. Powstaje pytanie, jak wygląda transformacja między tymi bazami. Rozpatrzmy najpierw przypadek $SU(2)$. Z mechaniki kwantowej wiemy, że standardowa postać generatorów dla spinu 1 ma postać:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (12.16)$$

Z kolei generatory $-i\varepsilon_{klm}$ mają jawnie postać:

$$\tilde{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.17)$$

Przypomnijmy, jak w mechanice kwantowej definiujemy elementy macierzowe operatorów:

$$\langle n | \tilde{T}_l | k \rangle = \left(\tilde{T}_l \right)_{nk}, \quad (12.18)$$

co oznacza, że stany transformują się

$$\tilde{T}_l | k \rangle = | n \rangle \left(\tilde{T}_l \right)_{nk}, \quad (12.19)$$

gdzie suma biegnie po indeksie n . Przypomnijmy jeszcze, że jeżeli dany stan kwantowy reprezentowany jest przez wektor \vec{a} (suma po k)

$$| a \rangle = a_k | k \rangle \quad (12.20)$$

to

$$\langle n | \tilde{T}_l | a \rangle = \left(\tilde{T}_l \right)_{nk} a_k. \quad (12.21)$$

Czyli wektory reprezentujące dany stan kwantowy przekształcają się jak w normalnym mnożeniu macierzowym, natomiast stany transformują się w zasadzie poprzez macierz transponowaną. Dotyczy to oczywiście wszystkich operatorów, nie tylko operatorów \tilde{T}_l .

Stany bazowe w reprezentacji z „wężykiem” oznaczyliśmy przez $| n \rangle$, gdzie $n = 1, 2, 3$. Z kolei w reprezentacji standardowej ($m = -1, 0, 1$):

$$\langle j, m' | T_l | j, m \rangle = (T_l)_{m'm}. \quad (12.22)$$

Rozpatrzmy transformację unitarną

$$| 1, m \rangle = | n \rangle U_{nm} \quad (12.23)$$

gdzie $n = 1, 2, 3$ (sumowanie), a m jest ustalone: $-1, 0$ lub 1 . Więc:

$$(T_l)_{m'm} = \langle 1, m' | T_l | 1, m \rangle = U_{m'n}^\dagger \langle n | T_l | k \rangle U_{km} = \left(U^\dagger \tilde{T}_l U \right)_{m'm}. \quad (12.24)$$

Macierz przejścia od jednej bazy do drugiej

$$T_l = U^\dagger \tilde{T}_l U. \quad (12.25)$$

ma postać:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.26)$$

co daje *explicite* (wg wzoru (12.23)):

$$\begin{aligned}
|1, +1\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i |2\rangle) , \\
|1, 0\rangle &= |3\rangle , \\
|1, -1\rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - i |2\rangle) .
\end{aligned} \tag{12.27}$$

Warto zapamiętać znak – w pierwszej relacji.

Powtarzając tę samą procedurę dla grupy SU(3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{8}, 1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|4\rangle + i |5\rangle) , \\
|\mathbf{8}, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|6\rangle + i |7\rangle) , \\
|\mathbf{8}, 0, 1, +1\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i |2\rangle) , \\
|\mathbf{8}, 0, 1, 0\rangle &= |3\rangle , \\
|\mathbf{8}, 0, 1, -1\rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - i |2\rangle) , \\
|\mathbf{8}, -1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|6\rangle - i |7\rangle) , \\
|\mathbf{8}, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}} (|4\rangle - i |5\rangle) , \\
|\mathbf{8}, 0, 0, 0\rangle &= |8\rangle .
\end{aligned} \tag{12.28}$$

13 Współczynniki Clebscha-Gordana dla grupy SU(3)

Podobnie jak w przypadku grupy SU(2), do konkretnych obliczeń będziemy potrzebować współczynników Clebscha-Gordana dla SU(3). Faktoryzują się one na zwykły współczynnik C-G dla izospinu i tzw. czynnik izoskalarny:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|c} (p_1, q_1) & (p_2, q_2) & (p, q)_\gamma \\ Y^{(1)}, I_3^{(1)} & Y^{(2)}, I_3^{(2)} & Y, I_3 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|c} I^{(1)} & I^{(2)} & I \\ I_3^{(1)} & I_3^{(2)} & I_3 \end{array} \right) \\
&\times \left(\begin{array}{cc|c} (p_1, q_1) & (p_2, q_2) & (p, q)_\gamma \\ Y^{(1)}, I^{(1)} & Y^{(2)}, I^{(2)} & Y, I \end{array} \right) ,
\end{aligned} \tag{13.29}$$

gdzie czynnik γ oznacza degenerację (jak w przykładzie na iloczyn dwóch oktetów).

Widzimy z rysunku 10.5, że w istocie współczynniki f_{mnl} oraz d_{mnl} są współczynnikami składania dwóch oktetów (stany m i n) na oktet (stan l). Są to współczynniki wyrażone w bazie $|m\rangle$, natomiast współczynniki C-G z równania (13.29) są wyrażone w bazie $|Y, I, I_3\rangle$. Współczynniki te można „przetłumaczyć” jedno na drugie przy pomocy (12.28).

Widzimy zatem, że dwa oktety pojawiające się w rozkładzie (10.9) odpowiadają złożeniu symetrycznemu i antysymetrycznemu dwóch oktetów wyjściowych.

Obszerne omówienie własności grupy $SU(3)$ wraz z konwencjami dotyczącymi współczynników C-G, oraz tabele czynników izoskalarnych można znaleźć w przeglądowej pracy de Swarta z 1963 roku. Rozbudowane tablice współczynników C-G rok później opublikowali McNamee i Chilton. Obecnie w celu znalezienia współczynników C-G najwygodniej posłużyć się programem opublikowanym przez Kaedinga lub opublikowanymi przez niego tablicami.

J.J. de Swart, *Rev. Mod. Phys.* **35** (1963) 916,

P. McNamee, F. Chilton, *Rev. Mod. Phys.* **36** (1964) 1005,

T.A. Kaeding, *Comput. Phys. Commun.* **85** (1995) 82

T.A. Kaeding, *Tables of $SU(3)$ isoscalar factors*, <http://arxiv.org/pdf/nucl-th/9502037.pdf>

Dodatek: generatory grupy $SU(3)$

Zdefiniujmy funkcję

$$F[(p, q), Y, I] = \frac{1}{\sqrt{2I}} \sqrt{\left(\frac{1}{3}(q-p) + I - \frac{1}{2}Y\right)} \quad (13.30)$$

$$\times \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}(p+2q) - I + \frac{1}{2}Y\right) \left(1 + \frac{1}{3}(2p+q) + I - \frac{1}{2}Y\right)}.$$

Wówczas działanie operatorów podnoszenia i obniżania dane jest następującymi wzorami:

$$V_+ \left| (p, q), Y, I, I_3 \right\rangle = \sqrt{\frac{I+I_3+1}{2I+1}} F[(q, p), -Y, I+1] \left| (p, q), Y+1, I+\frac{1}{2}, I_3+\frac{1}{2} \right\rangle$$

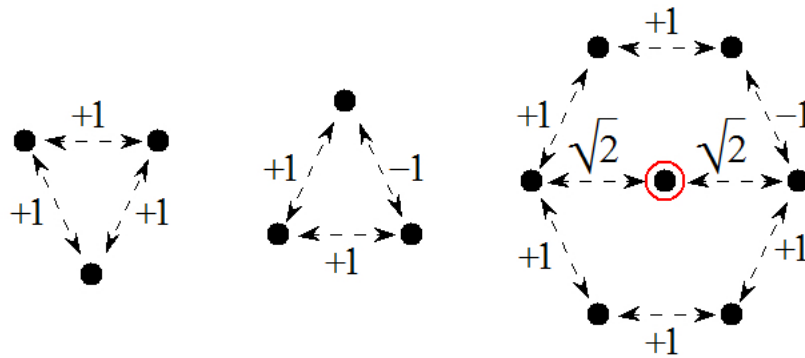
$$+ \sqrt{\frac{I-I_3}{2I+1}} F[(p, q), Y, I] \left| (p, q), Y+1, I-\frac{1}{2}, I_3+\frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$V_- \left| (p, q), Y, I, I_3 \right\rangle = \sqrt{\frac{I-I_3+1}{2I+1}} F[(p, q), Y, I+1] \left| (p, q), Y-1, I+\frac{1}{2}, I_3-\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$+ \sqrt{\frac{I+I_3}{2I+1}} F[(q, p), -Y, I] \left| (p, q), Y-1, I-\frac{1}{2}, I_3-\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (13.31)$$

oraz

$$\begin{aligned}
 U_+ \left| (p, q), Y, I, I_3 \right\rangle &= \sqrt{\frac{I - I_3 + 1}{2I + 1}} F[(q, p), -Y, I + 1] \left| (p, q), Y + 1, I + \frac{1}{2}, I_3 - \frac{1}{2} \right\rangle \\
 &\quad - \sqrt{\frac{I + I_3}{2I + 1}} F[(p, q), Y, I] \left| (p, q), Y + 1, I - \frac{1}{2}, I_3 - \frac{1}{2} \right\rangle, \\
 U_- \left| (p, q), Y, I, I_3 \right\rangle &= -\sqrt{\frac{I + I_3 + 1}{2I + 1}} F[(p, q), Y, I + 1] \left| (p, q), Y - 1, I + \frac{1}{2}, I_3 + \frac{1}{2} \right\rangle \\
 &\quad + \sqrt{\frac{I - I_3}{2I + 1}} F[(q, p), -Y, I] \left| (p, q), Y - 1, I - \frac{1}{2}, I_3 + \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (13.32)
 \end{aligned}$$



Rysunek 13.12: Działanie operatorów obniżania i podwyższania w reprezentacjach $\mathbf{3}$ i $\bar{\mathbf{3}}$ oraz na niektóre stany w okciecie.