6 Grupa SU(N)

Unitarne (zespolone) macierze $N \times N$ można sparametryzować pzez $2N^2$ rzeczywistych parametrów. Ale

- $\det U = 1$,
- unitarność: $U^\dagger U = 1$

narzucają dodatkowe warunki. Rozważmy warunek drugi:

$$\begin{bmatrix} [& \vec{u}_1^\dagger &] \\ & \cdots & \\ [& \vec{u}_n^\dagger &] \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \\ \vec{u}_1 \\ \\ \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \\ \vec{u}_n \\ \\ \end{bmatrix} \right] = 1, \tag{6.1}$$

(gdzie $\vec{u}_i$ są N wymiarowymi wektorami zespolonymi) co daje N^2 równań zespolonych:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_1 &= 1,\ \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_2 = 0,\ \ldots\ \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_n = 0, \\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_1 &= 0,\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_2 = 1,\ \ldots\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_n = 0, \\ &\vdots \\ \vec{u}_n^\dagger \vec{u}_1 &= 0,\ \vec{u}_n^\dagger \vec{u}_2 = 0,\ \ldots\ \vec{u}_n^\dagger \vec{u}_n = 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Ale, oprócz równań diagonalnych $\vec{u}_i^\dagger \vec{u}_i = 1$, pozostałe równania są parami zależne, np.: $\vec{u}_1^\dagger \vec{u}_2 = 0$ oraz $\vec{u}_2^\dagger \vec{u}_1 = 0$. Zatem niezależne są tylko równania „nad diagonalną", których jest $(N^2 - N)/2$ oraz te na diagonalnej których jest N. Jednak równania „nad diagonalną" są zespolone, a więc dają $N^2 - N$ warunków rzeczywistych, natomiast równania „na diagonalii" są rzeczywiste i dają N warunków rzeczywistych. Zatem unitarność daje N^2 warunków rzeczywistych.

Zauważmy, że równanie (6.1) gwarantuje, że $|\det U| = 1$, zatem warunek $\det U = 1$ określa dodatkowo tylko fazę U, czyli daje dodatkowo jeden warunek rzeczywisty (a nie dwa, jakby się można spodziewać). Zatem całkowita liczba parametrów rzeczywistych opisująca macierz SU(N) wynosi:

$$2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1. \tag{6.3}$$

Wygodną metodą parametryzacji macierzy SU(N) jest forma exponencjalna

$$U = \exp\left(-i \sum_{n=1}^{N^2-1} \alpha_n\, T_n \right) = e^{-i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} \tag{6.4}$$

gdzie $\vec{\alpha}$ jest $N^2 - 1$ wymiarowym wektorem rzeczywistym, a $N^2 - 1$ hermitowskich (bo musi być $U^\dagger U = 1$) macierzy $N \times N$ oznaczonych jako T_n, nazywanych jest generatorami grupy SU(N). Dodatkowo macierze T_n są bezśladowe, co wynika z tożsamości

$$\det U = \exp\left(\operatorname{Tr}\log U\right). \tag{6.5}$$

Znany przykład z grupy SU(2):

$$T_n = \frac{1}{2}\tau_n, \; n = 1, 2, 3, \tag{6.6}$$

gdzie τ_n są macierzami Pauliego. Czynnik 1/2 jest kwestią konwencji.

Aby macierz U była rzeczywiście jednoznacznie sparametryzowana przez $N^2 - 1$ parametrów α_n, macierze T_n muszą być liniowo niezależne, tzn.

$$\text{jeżeli } \vec{\alpha} \cdot \vec{T} = 0 \text{ to } \vec{\alpha} \equiv 0. \tag{6.7}$$

Ten warunek jest spełniony gdy

$$\mathrm{Tr}(T_m T_n) = \frac{1}{2}\delta_{mn}. \tag{6.8}$$

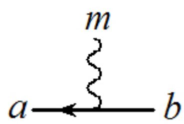
Tu znowu 1/2 jest konwencją. Rzeczywiście, mnożąc równanie (6.7) z lewej strony przez T_m i biorąc ślad, otrzymujemy:

$$\mathrm{Tr}\left(T_m \sum_n \alpha_n T_n\right) = \frac{1}{2}\alpha_m = 0. \tag{6.9}$$

Czyli z warunku $\vec{\alpha} \cdot \vec{T} = 0$ wynika $\vec{\alpha} = 0$.

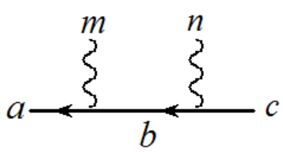
7 Notacja graficzna dla grupy SU(N)

Warto, za Cvitanoviciem, przyjąć konwencję graficzną obrazującą generatory:



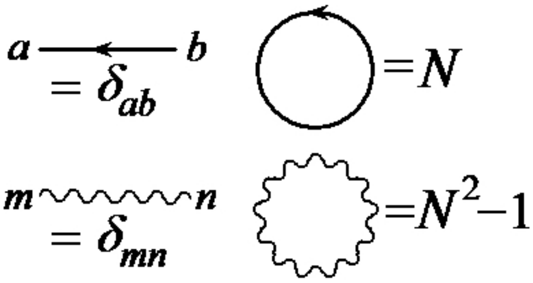
$$= (T_m)_{ab}$$

W tej notacji mnożenie macierzy ma postać:

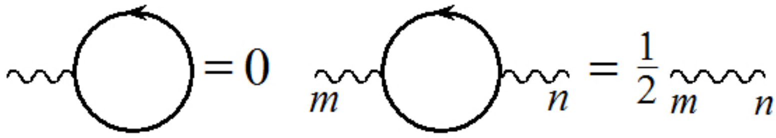


$$= (T_m)_{ab}(T_n)_{bc}$$

Dodatkowo wprowadźmy delty Kronekera i ich ślady:



W tej graficznej notacji bezśladowiść generatorów i równanie (6.8) przyjmują postać:



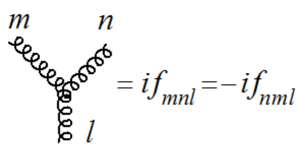
Oczywiście generatory T_m są nieprzemienne

$$[T_m, T_n] = i f_{mnl} T_l, \tag{7.10}$$

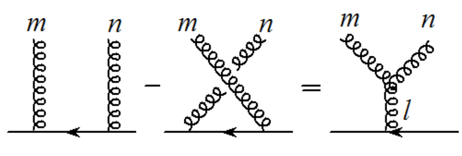
gdzie całkowicie antysymetryczne stałe f_{mnl} są nazywane stałymi struktury grupy SU(N) – dla grupy SU(2) są to symbole Levi-Civity:

$$f_{mnl} = \varepsilon_{mnl}.$$

Wprowadzając notację graficzną dla stałych struktury (proszę zwrócić uwagę na zgodne z kierunkiem wskazówek zegara uporządkowanie indeksów, gdyż stałe struktury grupy są antysymetryczne):



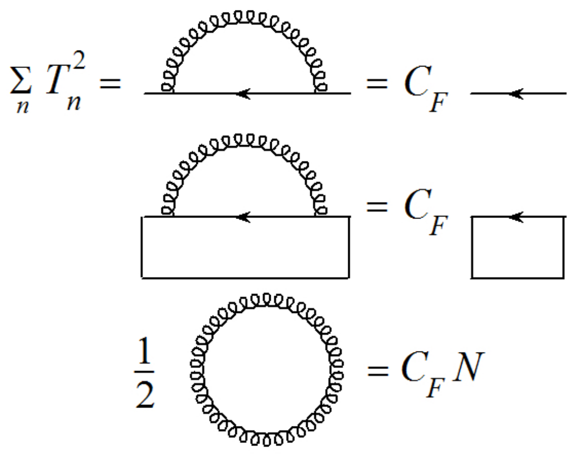
możemy relację komutacji (7.10) przedstawić w następującej formie:



Relacja komutacji (7.10) jest spełniona nie tylko przez macierze $N \times N$ definiujące grupę SU(N), ale także przez macierze wyżej wymiarowe. Dla grupy SU(2) reprezentacja fundamentalna dana jest przez macierze Pauliego odpowiadające spinowi $s = 1/2$, ale wiemy że dopuszczalne są reprezentacje wyżej wymiarowe o spinie $s = n/2$, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$, które mają wymiar $(2s+1)$. Dla grupy SU(2) przyjęło się numerować reprezentacje wartością spinu s. Alternatywnie możnaby je numerować wymiarem $d = 2s+1$ lub wartością własną *operatora Casimira*:

$$\sum_m T_m^2 = \underbrace{s(s+1)}_{=C_s}\mathbf{1}. \tag{7.11}$$

Opisane powyżej metody graficzne pozwalają obliczyć C_F (operator Casimira dla reprezentacji fundamentalnej) dla dowolnego SU(N), co zilustrowane jest na rysunku poniżej.



W drugim kroku wzięliśmy ślad ze względu na indeksy a i b, a w trzecim kroku skorzystaliśmy z warunku normalizacyjnego (6.8). Ostatecznie dostajemy

$$C_F = \frac{N^2-1}{2N} = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{dla} \quad \mathrm{SU}(2) \\ \\ \frac{4}{3} & \text{dla} \quad \mathrm{SU}(3) \end{cases}. \tag{7.12}$$

8 Reprezentacje fundamentalne grupy SU(2) i SU(3)

Aby w sposób jawny zdefiniować grupę SU(N) należy albo podać jawną postać generatorów $N \times N$, czyli jawną postać generatorów w reprezentacji *fundamentalnej* (zwanej także definiującą), albo podać wartości numeryczne stałych struktury f_{mnl}. Oczywiście są to metody równoważne: znając jawną postać generatorów można wyliczyć stałe struktury i odwrotnie, znając stałe struktury można obliczyć jawną postać generatorów nie tylko w reprezentacji fundamentalnej, ale w dowolnej reprezentacji grupy SU(N). Dla grupy SU(2) reprezentacja fundamentalna dana jest przez macierze Pauliego odpowiadające spinowi $s = 1/2$, dla grupy SU(3) przyjęło się używać generatorów w postaci macierzy

Gell-Manna ($T_m = 1/2\,\lambda_m$):

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \\
\lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

Warto zauważyć, że macierze Gell-Manna są dwuwymarowymi macierzami Pauliego $\tau_{1,2}$ pozanurzanymi na różne sposoby w strukturę macierzy 3×3 oraz jedną macierzą τ_3 i nową, nie związaną z SU(2), macierzą λ_8. Dwie z tych macierzy są diagonalne. Ogólnie dla grupy SU(N) daje się zdiagonalizować $N - 1$ generatorów (rząd grupy). Widzimy, że pierwsze trzy macierze Gell-Manna (łącznie z λ_3) odpowiadają zanurzonym w lewym, górnym rogu trzem macierzom Pauliego. Oznacza to, że w grupie SU(3) istnieje podgrupa SU(2), którą nazywać będziemy *izospinem*: $I_{1,2,3} = T_{1,2,3} = 1/2\,\lambda_{1,2,3}$. Istnieje zatem dodatkowa macierz diagonalna w tej bazie

$$
\sum_{n=1}^{3} T_n^2 = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\tag{8.14}
$$

Własności te przenoszą się na wszystkie reprezentacje grupy SU(3), którym odpowiadają macierze wyżej wymiarowe spełniające warunki komutacji (7.10). Warto w tym miejscu zaznaczyć, że wybór aby λ_3 było diagonalne, jest konwencją. Moglibyśmy utworzyć następujące kombinacje

$$
\begin{aligned}
\lambda_3' &= \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
\lambda_3'' &= -\frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

i ortogonalne do nich kombinacje odpowiadajace nowym λ_8' lub λ_8''. Wówczas podgrupa izospinowa byłaby oparta na macierzach $(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_3')$ lub $(\lambda_6, \lambda_7, \lambda_3'')$. Podgrupy te nazywamy odpowiednio $V-$spin oraz $U-$spin.

Z matematycznego punktu widzenia reprezentacja grupy jest określona przez zbiór macierzy spełniających (7.10), fizycy poprzez reprezentację rozumieją często *bazę*, w której macierze te działają. Wektory bazy numerujemy liczbami kwantowymi odpowiadającymi wszystkim operatorom, które można jednocześnie zdiagonalizować. W przypadku grupy SU(2) takimi operatorami są operator Casimira

$$\vec{T}^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = s(s+1)\mathbf{1}.$$

oraz operator T_3. Zwyczajowo stany bazy numerujemy wartością spinu s (moglibyśmy użyć wartość własną operatora Casimira lub wymiar reprezentacji $d = 2s+1$, są to wielkości, które można jednoznacznie wyracić jedne przez drugie) oraz wartością własną T_3 oznaczaną jako m:

$$|s, m\rangle$$

Dla grupy SU(3) sytuacja jest bardziej skomplikowana z dwóch powodów. Po pierwsze spośród 8 generatorów (pamiętajmy, że dla $N = 3$ liczba generatorów wynosi $N^2 - 1 = 8$) można jednocześnie zdiagonalizować dwa z nich T_3 i T_8. Oprócz tego diagonalny jest operator Casimira podgrupy izospinowej (8.14) oraz pełny operator Casimira $\sum_n T_n^2$. Zamiast tego ostatniego przyjęło się używać wymiaru reprezentacji. Drugi powód wiąże się z tym, że relacje komutacji (7.10) spełnione są także przez macierze $-T_m^*$ (reprezentacja sprzężona):

$$[-T_m^*, -T_n^*] = i f_{mnl}\,(-T_l^*)\,. \tag{8.16}$$

Łatwo sę przekonać, że

$$\sum_n (-T_n^*)^2 = \sum_n T_n^2, \tag{8.17}$$

a więc operator Casimira nie rozróżnia tych dwóch reprezentacji. Można zapytać, dlaczego w przypadku grupy SU(2) (a więc spinu), nie musieliśmy wprowadzać pojęcia reprezentacji sprzężonej. Wiąże się to z tym, że dla macierzy Pauliego istnieje macierz U taka, że

$$U\tau_m U^\dagger = -\tau_m^*, \tag{8.18}$$

czyli, że reprezentacja $s = 1/2$ i reprezentacja sprzężona do niej są unitarnie równoważne. Ta własność nie zachodzi dla grup SU(N) przy $N > 2$. Dla grupy SU(2) mamy:

$$\begin{aligned} \{U, \tau_{1,3}\} &= 0, \\ [U, \tau_2] &= 0. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Widzimy, że równania (8.19) implikują, że $U \sim \tau_2$. Macierz Pauliego τ_2 nie jest unitarna, ale $i\tau_2$ już tak. Równiania SU(3) analogiczne do (8.19) nie mają rozwiązania gdyż w iloczynie macierzy Gell-Manna pojawia sie dodatkowa struktura symetryczna:

$$\lambda_m \lambda_n = \frac{2}{3}\delta_{mn}\,\mathbf{1} + i\,f_{mnl}\lambda_l + d_{mnl}\lambda_l. \tag{8.20}$$

Aby wprowadzić notację graficzną dla reprezentacji sprzężonej rozważmy prawo transformacji

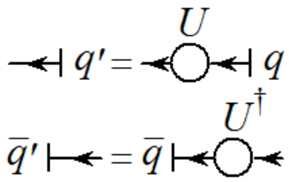
$$q' = Uq \tag{8.21}$$

gdzie U jest dane przez (6.4). Sprzęgnijmy (8.21) po hermitowsku

$$\overline{q}' = \overline{q} U^{\dagger}, \tag{8.22}$$

gdzie

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \ \overline{q} = \begin{bmatrix} q_1^* & q_2^* & q_3^* \end{bmatrix} \tag{8.23}$$



Zauważmy, że iloczyn

$$\overline{q} q = \overline{q}' q' \tag{8.24}$$

się nie transformuje, a więc jest singletem względem grupy SU(N). Rozpiszmy (8.22)

$$\overline{q}_b' = \overline{q}_a \left(e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} \right)_{ab} = \left(e^{-i\vec{\alpha}\cdot(-\vec{T}^*)} \right)_{ba} \overline{q}_a, \tag{8.25}$$

gdzie skorzystaliśmy z hermitowskości macierzy T, która implikuje

$$T^* = T^{\mathrm{T}}. \tag{8.26}$$

Zatem rzeczywiście reprezentacja sprzężona transformuje się za pomocą generatorów $-T^*$. W notacji graficznej użyliśmy strzałki do oznaczenia generatorów w reprezentacji **3**. Strzałka w przeciwną stronę oznacza zatem reprezentację $\overline{\mathbf{3}}$. Ponadto, jak się przekonamy, istnieją także reprezentacje o tym samym wymiarze, które są różne i nie są wzajemnie sprzężone.

A zatem stany bazowe będziemy numerować wartościami wymiaru reperezentacji i ewentualnie sprzężeniem, jeżeli reprezentacja generowana jest przez macierze $-T_n^*$, liczbami I i I_3 odpowiadajacymi podgrupie izospinowej oraz liczbą kwantową $Y = \lambda_8/\sqrt{3}$ nazywaną hiperładunkiem. Zatem stany bazowe dla reprezentacji fundamentalnej o wymiarze 3, oznaczane $|(\mathbf{3})\, Y, I, I_3\rangle$, to:

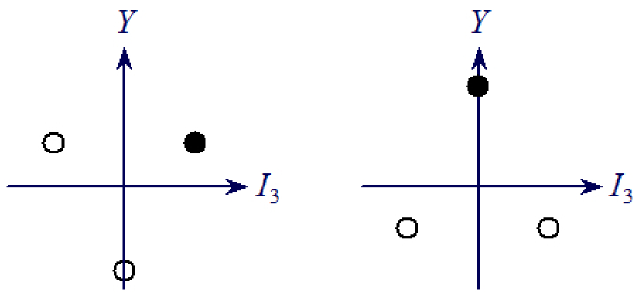
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \left|(\mathbf{3})\, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \left|(\mathbf{3})\, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \left|(\mathbf{3})\, -\frac{2}{3}, 0, 0 \right\rangle. \tag{8.27}$$

Stany bazowe dla reprezentacji sprzężonej (oznaczamy ją jako $\overline{\mathbf{3}}$) mają postać:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \left|(\overline{\mathbf{3}})\, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \left|(\overline{\mathbf{3}})\, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \left|(\overline{\mathbf{3}})\, \frac{2}{3}, 0, 0 \right\rangle. \tag{8.28}$$

Odwrotne znaki dla I_3 i Y borą się ze znaku $-$ w definicji $-T_m^*$ oraz z faktu, że λ_3 i λ_8 są rzeczywiste. Z kolei wartości własne dla operatorów Casimira pełnej reprezentacji i podgrupy izospinowej są identyczne jak w przypadku reprezentacji fundamentalnej.

Stany reprezentacji grupy SU(3) będziemy przedstawiać na tzw. diagramach wagowych, jako punkty na płaszczyźnie $I_3 - Y$. Na rysunku poniżej pokazane są diagramy wagowe reprezentacji **3** i $\overline{\mathbf{3}}$. Punkty oznaczone czarną kropką to tzw. najwyższe wagi, do ich roli w konstrukcji reprezentacji SU(3) przejdziemy w następnym wykładzie.



Rysunek 8.1: Diagramy wagowe reprezentacji **3** i $\overline{\mathbf{3}}$.