

## 21 Rozpraszanie głęboko nieelastyczne $ep$

Rozpraszanie głęboko nieelastyczne elektron-proton dostarczyło jawnej ewidencji, że kwarki są rzeczywistymi cząstkami tworzącymi proton. Określenie „głęboko nieelastyczne” (ang. *deep inelastic scattering - DIS*) oznacza, że przekaz czteropędu  $q$  między elektronem a protonem jest duży,  $|q^2| \gg M^2$  (gdzie  $M$  jest masą protonu), a w stanie końcowym oprócz protonu pojawia się szereg nowych cząstek, głównie mezonów  $\pi$ . W dodatku, jak się za chwilę przekonamy, proces ten można opisać używając wprowadzonego przez nas w poprzednim rozdziale formalizmu rozpraszania, tak jak gdyby kwarki w protonie były cząstkami swobodnymi. Wydawało się, że takie podejście stoi w sprzeczności z obrazem protonu jako silnie związanego układu trzech kwarków, które nie istnieją jako stany asymptotyczne w dalekiej przeszłości  $|i\rangle$ , lub dalekiej przyszłości  $|f\rangle$ . Rozwiązanie tego paradoksu przyniosły noblowskie prace Davida Grossa, H. Davida Politzera i Franka Wilczka, w których wykazano, że stała sprzężenia w oddziaływaniach silnych (a więc „kolorowy” ładunek kwarku) maleje wraz ze wzrostem  $|q^2|$ . Stąd w granicy głęboko nieelastycznej chromodynamika kwantowa łączy się z teorią swobodnej.

Nasze rozważania rozpoczniemy od omówienia rozpraszania elastycznego, a następnie przejdziemy do przypadku głęboko nieelastycznego, pokażemy tzw. skalowanie Bjorkena i jego wyjaśnienie, jakie podał Richard Feynman formułując tzw. model *paronów*.

### 21.1 Rozpraszanie elastyczne dwóch różnych fermionów

Rozpatrzmy rozpraszanie dwóch różnych fermionów, np. elektronu i mionu (lub protonu, przy założeniu, że proton jest cząstką punktową). Odpowiedni diagram Feynmana pokazany jest na Rysunku, gdzie też opisana jest kinematyka. Zakładamy, że ze spoczywającym mionem (protonem) o masie  $M$  zderze się bezmasowy elektron, poruszający wzdłuż osi  $z$ . Odpowiednie czteropędy elektronu ( $k$ ) i drugiego fermionu ( $p$ ) przed i po zderzeniu parametryzujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} p &= M(1, 0, 0, 0), \\ k &= \omega(1, 0, 0, 1), \\ k' &= \omega'(1, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta), \\ q &= k - k' = p' - p. \end{aligned} \quad (21.1)$$

Zauważmy, że przekaz czteropędu

$$q^2 = -2\omega\omega'(1 - \cos \theta) = -4\omega\omega' \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (21.2)$$

jest ujemny.

W tej kinematyce wyprowadzony przez nas w poprzednim rozdziale wzór na różniczkowy przekrój czynny przyjmuje postać:

$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^4 k'}{(2\pi)^3} \delta(k'^2) \frac{d^4 p'}{(2\pi)^3} \delta(p'^2 - M^2) (2\pi)^4 \delta(k + p - k' - p'). \quad (21.3)$$

Jak się zaraz okaże, we wzorze (21.3) wykonujemy tylko niektóre całki (te które da się wykonać przy pomocy delt Diraka), stąd po ich wykonaniu ciągle mamy różniczkowy przekrój czynny, a nie całkowity. Zauważmy, że stojący przed wszystkim czynnikiem  $1/(4M\omega)$  to obliczony w poprzednim rozdziale strumień  $F$ . Następnie mamy kwadrat amplitudy rozpraszania wysumowany po końcowych polaryzacjach obu fermionów i uśredniony (stąd czynnikiem  $1/4$ ) po polaryzacjach cząstek zderzających się. Dalej jest całkowanie po czteropędach cząstek w stanie końcowym z uwzględnieniem faktu, że czteropędy te muszą spełniać związek Einsteina (mówimy, że cząstki te są na *powłoce masy*). Na każdą cząstkę w stanie końcowym przypada dodatkowo czynnikiem  $1/(2\pi)^3$ . Wreszcie na końcu mamy deltę Diraka odzwierciedlającą zachowanie energii i pędu wraz z czynnikiem  $(2\pi)^4$ .

Aby obliczyć (21.3) musimy, po pierwsze, wykonać całki wykorzystując występujące tam delty Diraka (w ten sposób zorientujemy się, od ilu niezależnych zmiennych kinematycznych zależy  $d\sigma$ ). Całki te możemy wykonać bez znajomości  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ . Po drugie, musimy obliczyć kwadrat  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$  i wyrazić go przez niezależne zmienne kinematyczne.

### 21.1.1 Kinematyka

Na początek zajmiemy się kinematyką. Po pierwsze uprościmy wszystkie czynniki  $2\pi$  a następnie korzystając z ostatniej delty Diraka (zachowanie energii i pędu) wykonamy całkę po  $d^4p'$ . Wreszcie całkę po  $d^4k'$  rozłożymy na całkę po energii i trójpędzie:

$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{d\omega' d^3k' \delta(\omega'^2 - k'^2)}_{=I} \delta((p+q)^2 - M^2). \quad (21.4)$$

Zajmijmy się teraz całką oznaczoną w równaniu (21.4) jako  $I$  bez uwzględniania ostatniego więzu  $p'^2 = (p+q)^2 = M^2$ :

$$\begin{aligned} I &= \int d\omega' d^3\vec{k}' \delta(\omega'^2 - k'^2) = \int k'^2 dk' d\varphi d\cos\theta d\omega' \delta(\omega'^2 - k'^2) \\ &= 2\pi \int d\cos\theta \frac{\omega'^2 d\omega'}{2\omega'} = \pi \int \omega' d\omega' d\cos\theta. \end{aligned} \quad (21.5)$$

Przy wyprowadzaniu równania (21.5) założyliśmy *implicite*, że pozostający formalnie pod całką element macierzowy  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$  nie zależy od  $\varphi$ . Jak się zaraz przekonamy, to założenie jest prawdziwe, jako że w wyrażeniu wysumowanym po polaryzacjach nie ma wyróżnionego kierunku w płaszczyźnie prostopadłej do osi  $z$ .

Widzimy zatem, że bez uwzględnienia ostatniej delty Diraka w równaniu (21.4), pozostała nam całka po dwóch zmiennych:  $\omega'$  i  $\cos\theta$ , czyli po końcowej energii i kącie rozproszenia elektronu. Wygodniej będzie posługiwać się innymi zmiennymi:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2 = 2\omega\omega'(1 - \cos\theta), \\ \nu &= \omega - \omega', \end{aligned} \quad (21.6)$$

czyli przekazem czteropędu i przekazem energii, dla których musimy wyliczyć Jacobian:

$$\begin{aligned} d\omega' d\cos\theta &= \left| \frac{d(\omega', \cos\theta)}{d(\nu, Q^2)} \right| dQ^2 d\nu \\ &= \frac{1}{2\omega\omega'} dQ^2 d\nu. \end{aligned} \quad (21.7)$$

Stąd wynika, że

$$I = \frac{\pi}{2\omega} \int dQ^2 d\nu. \quad (21.8)$$

Ostatnia delta Diraka w równaniu (21.4) wyeliminuje jedną ze zmiennych  $Q^2$  lub  $\nu$  gdyż

$$\delta((p+q)^2 - M^2) = \delta(2M\nu - Q^2) = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right). \quad (21.9)$$

Zatem różniczkowy przekrój czynny na elastyczne rozpraszanie dwóch fermionów przyjmuje postać

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{16M^2\omega^2} \frac{1}{4\pi} \int d\nu \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right). \quad (21.10)$$

Oczywiście całkę po  $d\nu$  można trywialnie wykonać i pozostanie nam różniczkowy rozkład w zmiennej  $Q^2$ . Przekrój czynny (21.10) zapisaliśmy z zachowaniem delty Diraka dla zmiennej  $\nu$ , ponieważ w rozpraszaniu *nieelastycznym* w stanie końcowym mamy proton i wiele innych cząstek, dla których kwadrat sumarycznego czteropędu  $p' = p + q$  jest nieznanym, a w szczególności  $p'^2 \neq M^2$  i całe wyrażenie (21.10) trzeba wycałkować po  $p'^2$ , co – zgodnie z (21.9) – odpowiada całce po  $d\nu$ . Taki rozkład nazywamy *inkluzywnym*, ponieważ mierzymy tylko  $Q^2$ , czyli elektron i w ogóle nas nie interesuje co stało się z protonem.

## 21.2 Element macierzowy $|\mathcal{M}_{fi}|^2$

Aby obliczyć kwadrat elementu macierzowego  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$  (patrz Rysunek 21.1) i wysumować go po polaryzacjach musielibyśmy się zagłębić w techniki obliczania diagramów Feynmana.

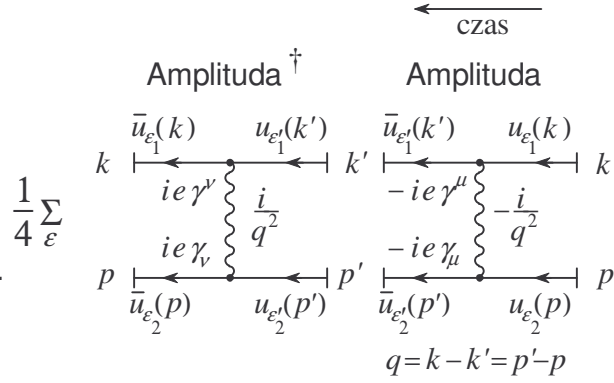
Nie wdając się w szczegóły, można dość prosto zrozumieć, że wysumowanie kwadratu amplitudy po polaryzacjach w stanie końcowym i początkowym prowadzi do śladu po indeksach dirakowskich, które są związane ze spinem fermionu. W tym celu musimy użyć wzoru

$$\sum_{\varepsilon} [u_{\varepsilon}(p)]_{\alpha} [\bar{u}_{\varepsilon}(p)]_{\beta} = (\gamma \cdot p + m)_{\alpha\beta} \quad (21.11)$$

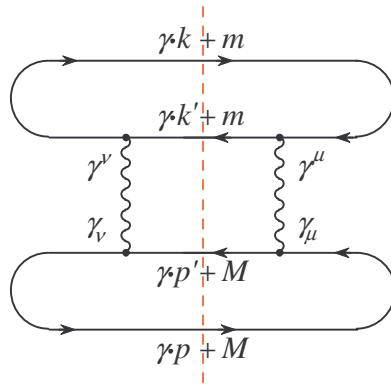
i wstawić go do wyrażenia zilustrowanego na Rysunku 21.1. Odpowiedni diagram przedstawiający taką sumę pokazany jest na Rysunku 21.2.

Wynik, który otrzymujemy obliczając odpowiednie ślady, jest uderzająco prosty:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e_1^2 e_2^2}{(q^2)^2} 8 ((k \cdot p)(k' \cdot p') + (k \cdot p')(k' \cdot p) - M^2 (k \cdot k')). \quad (21.12)$$



Rysunek 21.1: Kwadrat amplitudy rozpraszania dwóch różnych fermionów. Suma po polaryzacjach dotyczy bispinorów  $u$  i  $\bar{u}$



Rysunek 21.2: Ślad po indeksach fermionowych sprowadza kwadrat amplitudy  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$  do zwięzienia dwóch wyrażeń reprezentujących pętle fermionowe. Pionowa linia przerywana oddziela amplitudę od amplitudy sprzężonej. W prezentowanych tu obliczeniach przyjęliśmy  $m = 0$ .

Pierwszy człon to propagator fotonu do kwadratu pomnożony przez kwadrat ładunków elektrycznych odpowiednio pierwszej i drugiej cząstki. Wystarczy teraz podstawić odpowiednie wzory (21.1), aby otrzymać ostateczny wynik. Niemniej jednak spróbujemy ten sam wynik otrzymać nieco inaczej. Po pierwsze zauważmy, że – tak jak to zaznaczyliśmy w opisie Rysunku 21.2 – kwadrat amplitudy możemy zapisać jako zwięzienie dwóch śladów:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e_1^2 e_2^2}{(q^2)^2} L^{\nu\mu}(k, k') L_{\nu\mu}(p, p'). \quad (21.13)$$

Tensory  $L_{\nu\mu}$  obliczamy wykonując ślad po indeksach fermionowych, tu przytoczymy tylko wynik:

$$L_{\nu\mu}(p, p') = 2 \left[ p_\nu p'_\mu + p'_\nu p_\mu + \frac{q^2}{2} g_{\nu\mu} \right] \quad (21.14)$$

i analogicznie dla  $L_{\nu\mu}(k, k')$ . Pożyteczną metodą sprawdzenia, czy otrzymany wynik jest poprawny, polega na sprawdzeniu niezmienniczości wyrażenia  $L_{\nu\mu}$  ze względu na zmianę cechowania: Zauważmy, że musi zająć

$$q^\nu L_{\nu\mu} = q^\mu L_{\nu\mu} = 0. \quad (21.15)$$

Ponieważ, patrz Rysunek 21.1:

$$L_{\nu\mu}(p, p') = \frac{1}{2} \sum_{\text{pol: } \epsilon \epsilon'} [\bar{u}_\epsilon(p) \gamma_\nu u_{\epsilon'}(p')] [\bar{u}_{\epsilon'}(p') \gamma_\mu u_\epsilon(p)] \quad (21.16)$$

zweżenie z  $q^\mu$  zawiera człon

$$q^\mu [\bar{u}_{\epsilon'}(p') \gamma_\mu u_\epsilon(p)] = \bar{u}_{\epsilon'}(p')(p' - p)u_\epsilon(p) = 0, \quad (21.17)$$

ze względu na to, że bispinory  $u$  i  $\bar{u}$  spełniają równanie Diraka. Sprawdźmy. Pamiętając że  $q = p' - p$  i w związku z tym

$$p \cdot q = -\frac{q^2}{2}, \quad p' \cdot q = \frac{q^2}{2} \quad (21.18)$$

otrzymujemy

$$p \cdot p' = M^2 - q^2/2$$

i dalej

$$\begin{aligned} q^\mu L_{\mu\nu} &= 2 \left[ (p' - p) \cdot p p'_\nu + (p' - p) \cdot p' p_\nu + \frac{q^2}{2} (p' - p)_\nu \right] \\ &= 2 \left[ \left( M^2 - \frac{q^2}{2} - M^2 \right) p'_\nu + \left( M^2 + \frac{q^2}{2} - M^2 \right) p_\nu + \frac{q^2}{2} (p' - p)_\nu \right] = 0. \end{aligned} \quad (21.19)$$

Związki (21.18) pozwalają zapisać  $L_{\nu\mu}$  w następującej postaci

$$L_{\nu\mu}(p, q) = 4 \left( p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \left( p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) + q^2 \left( g_{\nu\mu} - \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} \right). \quad (21.20)$$

Zapis ten ma tę zaletę, że obie struktury

$$\left( p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \left( p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \quad \text{oraz} \quad g_{\nu\mu} - \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} \quad (21.21)$$

są oddzielnie niezmiennicze ze względu na zweżenie z  $q$ .

Jako ostatni krok możemy teraz policzyć zweżenie  $L^{\nu\mu}(k, k') L_{\nu\mu}(p, p')$ . Ponieważ  $q$  zweżone z  $L^{\nu\mu}(k, k')$  daje zero, możemy przyjąć

$$L_{\nu\mu}(p, p') = \mathcal{A} p^\nu p^\mu + \mathcal{B} g^{\nu\mu}, \quad (21.22)$$

gdzie dla rozpraszania elastycznego

$$\mathcal{A} = 4, \quad \mathcal{B} = q^2 = -Q^2.$$

Musimy policzyć dwa zwięzienia:

$$\begin{aligned} p_\nu p_\mu L^{\nu\mu}(k, k') &= 4M^2 \omega \omega' \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ g_{\nu\mu} L^{\nu\mu}(k, k') &= -8\omega \omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (21.23)$$

Ostatecznie podstawiając (21.23) do (21.13) a następnie do (21.10) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dQ^2} &= \frac{\pi \alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \int \frac{e_p^2}{\omega \omega'} \left\{ \frac{\mathcal{A}}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\mathcal{B}}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} d\nu \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right) \\ &= \frac{\pi \alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{e_p^2}{\omega \omega'} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (21.24)$$

Zapisując wzór (21.24) użyliśmy (21.2) dla propagatora fotonu  $1/(q^2)^2$  oraz definicję stałej struktury subtelnej

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (21.25)$$

Ponieważ rozpatrujemy rozpraszanie elektronu, ładunek cząstki, której pęd oznaczyliśmy  $k$  wynosi  $-e$ , natomiast za ładunek drugiej cząstki przyjęliśmy  $e e_p$ , gdzie  $e_p$  jest bezwymiarową liczbą: 1 dla protonu,  $\pm 1$  dla  $\mu^\pm$  lub liczbą ułamkową dla kwarków. Należy pamiętać, że dla ustalonego  $Q^2$  występujące w (21.24) zmienne  $\omega'$  i kąt rozproszenia  $\theta$  nie są niezależne. W praktyce wykonujemy wiele pomiarów mierząc  $\theta$  oraz  $\omega'$  a następnie obliczamy  $Q^2$  ze wzoru (21.2).

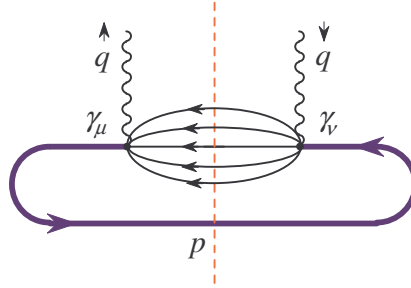
### 21.3 Rozpraszanie nieelastyczne elektron proton

Wydawałoby się, że dla elastycznego rozpraszania elektronu na protonie wystarczy przyjąć  $e_p = 1$  we wzorze (21.24). Niestety nie byłoby to dobre przybliżenie, gdyż proton nie jest cząstką elementarną i zastosowane przez nas techniki obliczania  $L_{\nu\mu}(p, p')$  dla elementarnego fermionu nie stosują się. Z fizycznego punktu widzenia wzór (21.24) miałby szansę dobrze opisać elastyczne rozpraszanie  $ep$  dla małych  $Q^2$ . Im większe  $Q^2$ , czyli np. im większy kąt rozpraszania, tym trudniej zmusić wszystkie składowe protonu do „zakręcenia” koherentnie pod tym samym kątem, aby po oddziaływaniu tworzyły one nadal stan związany. Zatem im większe  $Q^2$  tym większe prawdopodobieństwo, że proton się rozpadnie, a tym samym prawdopodobieństwo, że proton rozproszy się elastycznie powinno być dodatkowo tłumione. Wyjściem z tej sytuacji jest *sparametryzowanie*  $L_{\nu\mu}(p, p')$  przy pomocy pewnych funkcji  $Q^2$  i  $\nu$ , które odzwierciedlałyby fakt, że proton nie jest elementarny. W tego celu użyjemy faktu, że  $L_{\nu\mu}(p, p')$  można rozłożyć na dwa tensory niezmiennicze (21.21), analogicznie do równania (21.22) (pamiętajmy, że tensor  $L^{\nu\mu}(k, k')$  jest taki jak

poprzednio, gdyż elektron jest elementarnym fermionem), gdzie zamiast współczynników  $\mathcal{A}$  oraz  $\mathcal{B}$  będziemy mieli dwie nieznane funkcje  $W_{1,2}$ , które definiujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} L_{\nu\mu}(p, p') &\rightarrow W_{\nu\mu}(p, q) \\ &= \underbrace{4W_2}_{\mathcal{A}} \left( p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \left( p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) + \underbrace{4M^2 W_1}_{-\mathcal{B}} \left( -g_{\nu\mu} + \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} \right). \end{aligned} \quad (21.26)$$

Dla rozpraszania elastycznego funkcje te zależą tylko od  $Q^2$  i nazywane są *czynnikami kształtu* (ang. *form factor*). Dla rozpraszania nieelastycznego mamy dodatkową trudność, mianowicie  $p'^2 = (p + q)^2 \neq M^2$  jest nieznane, i różniczkowy przekrój czynny zależy od dwóch zmiennych niezależnych:  $Q^2$  i  $p'^2$  lub po prostu zmiennej  $\nu$  (musimy opuścić ostatnią deltę Diraka w pierwszej linijce równia (21.24)). Wówczas funkcje  $W_{1,2}$  zależą od dwóch tych dwóch zmiennych  $Q^2$  oraz  $\nu$ . Hadronowy tensor  $W_{\mu\nu}$  jest schematycznie zilustrowany na Rysunku 21.3.



Rysunek 21.3: Graficzna reprezentacja tensora  $W_{\mu\nu}$  w przypadku produkcji cząstek w stanie końcowym. Czerwona linia przerywana oddziela amplitudę od jej sprzężenia. Linie przecięte czerwona linia przerywana odpowiadają cząstkom na powłoce masy. Czas płynie w lewo.

Zatem przekrój czynny na nieelastyczne rozpraszanie elektron-proton przyjmuje postać

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\omega\omega'} \left\{ W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}, \quad (21.27)$$

gdzie przyjęliśmy  $e_p = 1$ . Podobnie jak w poprzednim przypadku kąt rozproszenia elektronu i jego energia po rozproszeniu,  $\omega'$ , zależą od  $Q^2$  i  $\nu$ .

## 21.4 Skalowanie Bjorkena i model partonów Feynmana

*A priori* należałoby się spodziewać, że  $W_{1,2}(Q^2, \nu)$  będą skomplikowanymi funkcjami  $Q^2$  i  $\nu$  odzwierciedlającymi dynamikę nieelastycznego rozpraszania na protonie. Jednakże w roku 1969 James Bjorken opublikował pracę, w której przewidział, że w granicy *głęboko nieelastycznej* (dziś nazywanej granicą Bjorkena)

$$Q^2 \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty \text{ tak, że } x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{Q^2}{2M\nu} = \text{const.}, \quad (21.28)$$

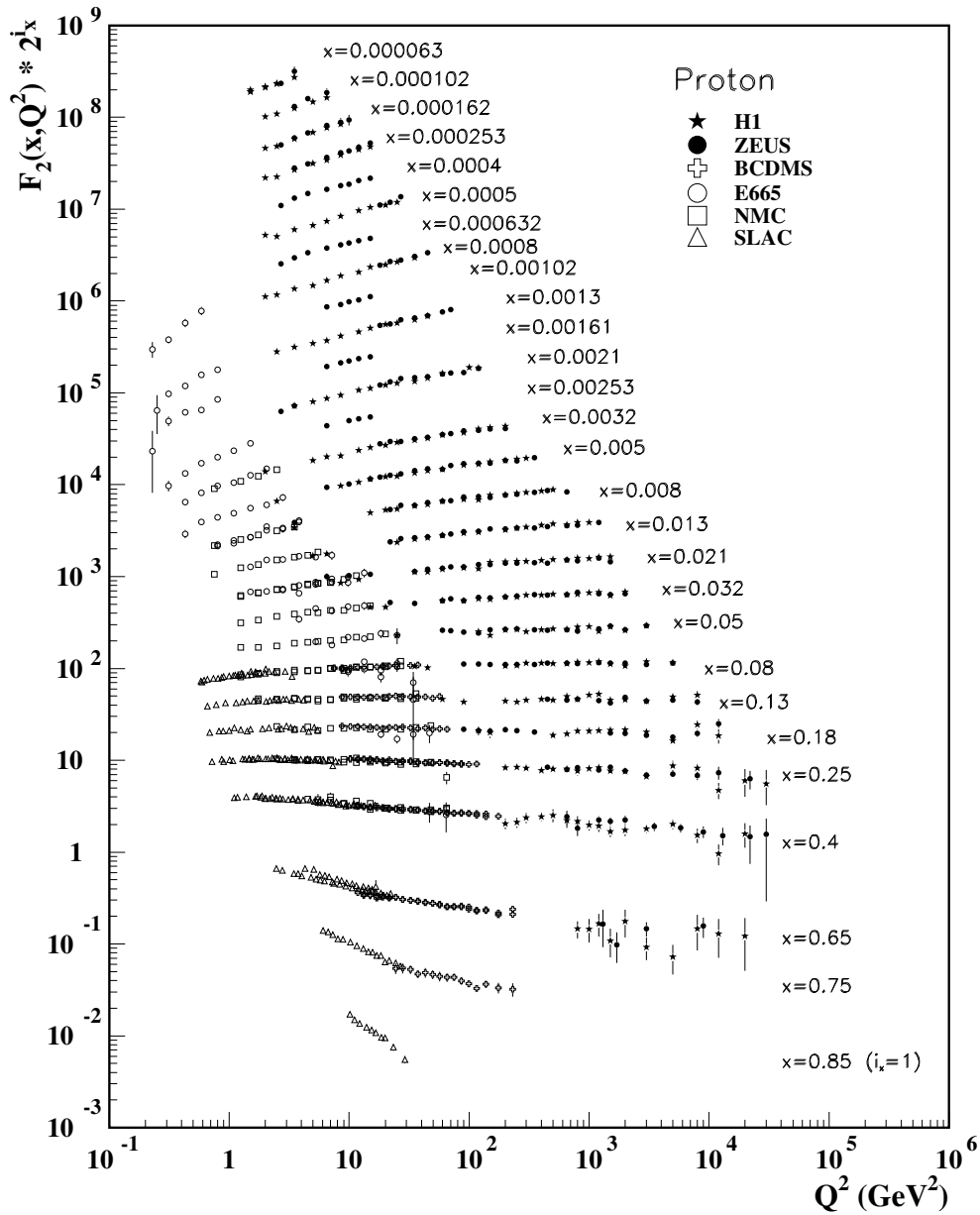
funkcje  $W_{1,2}$  powinny zależeć tylko od zmiennej  $x$ , zwanej dziś zmienną Bjorkena:

$$\begin{aligned} MW_1(Q^2, \nu) &\rightarrow F_1(x), \\ \nu W_2(Q^2, \nu) &\rightarrow F_2(x), \end{aligned} \quad (21.29)$$

gdzie funkcje  $F_{1,2}$  nazywamy funkcjami struktury protonu. Wyprowadzenie Bjorkena jest dość skomplikowane, ale zostało bardzo szybko potwierdzone przez eksperymenty przeprowadzone w SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) w latach 1967-1973 przez Jerome'a Friedmana, Henry'ego Kendalla i Richarda Taylora (Nobel 1990). Na Rysunku 21.4 pokazane są współczesne dane dla funkcji  $F_2(x, Q^2)$  wykreślone dla różnych wartości  $x$  jako funkcje  $Q^2$ . Dla lepszego rozróżnienia dane dla różnych  $x$  zostały przemnożone przez pewien czynnik, aby na wykresie nie zachodziły na siebie. Jeżeli hipoteza Bjorkena byłaby słuszna, to dane powinny się układać na poziomych prostych (niezależność  $F_2$  od  $Q^2$ ). Widzimy, że rzeczywiście dla wartości  $x \simeq 0.08 \div 0.4$  funkcja  $F_2$  nie zależy od  $Q^2$ . Dla małych i dużych wartości zmiennej  $x$  skalowanie Bjorkena jest wyraźnie łamane. Powodem zależności funkcji struktury  $F_2$  od  $Q^2$  są poprawki wyższych rzędów do przekroju czynnego *ep*. Obliczenia teoretyczne tych poprawek dają obecnie bardzo dobry opis danych doświadczalnych. Oryginalny eksperyment ze SLAC'u przeprowadzony był w obszarze kinematycznym, gdzie skalowanie nie było naruszone lub było złamane bardzo słabo.

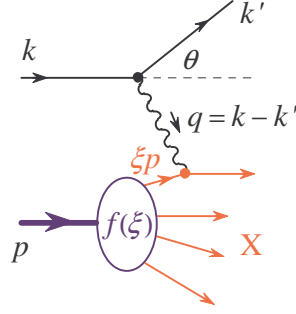
Choć praca Bjorkena wyzwoliła zainteresowanie rozpraszaniem nieelastycznym (poprzednio skupiano się raczej na pomiarach elastycznych czynników kształtu), to dopiero sformułowany przez Richarda Feynmana model partonów dał podwaliny dzisiejszemu rozumieniu struktury protonu. Feynman zauważył, że skalowanie Bjorkena można bardzo prosto wytłumaczyć zakładając, że proton składa się z elementarnych, składników, które nazwał partonami (ang. *part* część). W modelu partonów rozpraszanie elektronu zachodzi na pojedynczym partonie, który można potraktować jako cząstkę swobodną. Aby ten model oddziaływania uzasadnić, Feynman zaproponował, aby rozważyć rozpraszanie nie w układzie spoczynkowym protonu, ale w układzie, w którym proton porusza się z pędem zmiernym do nieskończoności. W tym układzie wszystkie partony poruszają się równolegle do pędu protonu (zaniedbujemy ewentualny pęd poprzeczny partonów) niosąc pęd będący ułamkiem pędu protonu. Rozkład prawdopodobieństwa znalezienia w protonie partonu  $i$  o pędzie  $p_i = \xi_i p$  jest dany pewną uniwersalną funkcją  $f_i(\xi_i)$ . Ponieważ proton jest układem kwantowo-mechanicznym, to liczba partonów fluktuuje w czasie, a czas trwania danej fluktuacji jest – zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga – odwrotnie proporcjonalny do energii takiej fluktuacji:  $\tau_p \sim 1/\Delta E$ . Z kolei czas oddziaływania fotonu z protonem jest odwrotnie proporcjonalny do energii fotonu:  $\tau_{\text{coll}} \sim 1/\nu$ . W układzie nieskończonego pędu fluktuacje trwają długo i  $\tau_{\text{coll}} \ll \tau_p$ . W tych warunkach foton „widzi” pewną zamrożoną konfigurację partonów. Proces rozpraszania polega na elastycznym rozproszeniu elektronu na partonie  $i$ . Taki parton „wylatuje” z protonu pod kątem  $\theta$  podczas gdy pozostałe partony poruszają się bez zmian i jeśli przekaz czteropędu był duży, to następuje dezintegracja protonu. Proces ten jest schematycznie pokazany na Rysunku.





Rysunek 21.4: Skalowanie Bjorkena. Zależność funkcji struktury  $F_2$  od  $Q^2$  dla różnych wartości zmiennej Bjorkena  $x$ .

O ile do interpretacji fizycznej wygodnie jest wybrać układ nieskończonego pędu, o tyle obliczenia wygodniej jest wykonać w układzie spoczynkowym protonu (21.1). Niesie to ze sobą pewną niedogodność, albowiem musimy założyć, że masa partonu wynosi  $m_i = \xi_i M$ . Stąd elastyczny przekrój czynny na rozproszenie elektronu na partonie  $i$  (przy założeniu,



Rysunek 21.5: Ilustracja modelu partonów Feynmana.

że parton jest fermionem o masie  $m_i$ ) ma postać:

$$\left. \frac{d\sigma_i}{dQ^2 d\nu} \right|_{\text{part.}} = \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{e_i^2}{\omega\omega'} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \frac{Q^2}{4\xi_i^2 M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2\xi_i M} \right). \quad (21.30)$$

Zauważmy, że argument funkcji delta we wzorze (21.30) możemy wyrazić przy pomocy zmiennej  $x$  Bjorkena (21.28)

$$\nu - \frac{Q^2}{2\xi_i M} = \nu \left( 1 - \frac{x}{\xi_i} \right). \quad (21.31)$$

Całkowity przekrój czynny na rozproszenie elektronu na protonie jest dany jako suma po wszystkich partonach i całka po ich pedach  $d\xi_i$ :

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \sum_i \int d\xi_i f_i(\xi_i) \left. \frac{d\sigma_i}{dQ^2 d\nu} \right|_{\text{part.}} \quad (21.32)$$

Porównując (21.32) z przytoczonym poniżej wzorem (21.27)

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\omega\omega'} \left\{ W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}$$

otrzymujemy natychmiastowo wzory na funkcje  $W_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} W_2 &= \sum_i e_i^2 \int d\xi f_i(\xi) \delta \left( \nu \left( 1 - \frac{x}{\xi} \right) \right) = \sum_i e_i^2 \int d\xi f_i(\xi) \frac{\xi^2}{\nu x} \delta(\xi - x) \\ &= \frac{1}{\nu} \sum_i e_i^2 x f_i(x) \\ W_1 &= \sum_i e_i^2 \int d\xi f_i(\xi) \frac{Q^2}{4\xi^2 M^2} \frac{\xi^2}{\nu x} \delta(\xi - x) = \frac{1}{2M} \sum_i e_i^2 f_i(x). \end{aligned} \quad (21.33)$$

Stąd funkcje struktury wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \nu W_2 = x \sum_i e_i^2 f_i(x), \\ F_1(x) &= MW_1 = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x) \end{aligned} \quad (21.34)$$

i rzeczywiście nie zależą od  $Q^2$ . Mamy też pierwsze przewidywanie modelu partonów, tzw. relację Callana-Grossa

$$F_2(x) = 2xF_1(x), \quad (21.35)$$

która jest spełniona doświadczalnie.

## 21.5 Kwarki jako partony

Model partonów powstawał równoległe z modelem kwarków. Dziś założenie, że partony to kwarki wydaje się być oczywiste. Zakładając, że w nukleonie są tylko lekkie kwarki możemy funkcje struktury protonu i neutronu zapisać jako:

$$F_2^p(x) = \frac{4}{9}x [u_p(x) + \bar{u}_p(x)] + \frac{1}{9}x [d_p(x) + \bar{d}_p(x) + s_p(x) + \bar{s}_p(x)], \quad (21.36)$$

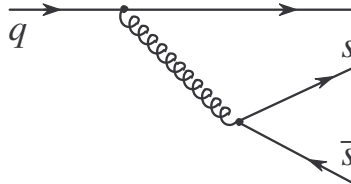
$$F_2^n(x) = \frac{4}{9}x [u_n(x) + \bar{u}_n(x)] + \frac{1}{9}x [d_n(x) + \bar{d}_n(x) + s_n(x) + \bar{s}_n(x)]. \quad (21.37)$$

Dodatkowo, zakładając symetrię izospinową, przyjmujemy:

$$u_p = d_n = u, \quad d_p = u_n = d, \quad s_p = s_n = s.$$

Ponieważ neutron i proton nie mają dziwności kwarki dziwne mogą pojawić się jedynie w wyniku produkcji radiacyjnej (Rysunek 21.6). Prowadzi to do równania:

$$\int dx (s(x) - \bar{s}(x)) = 0. \quad (21.38)$$



Rysunek 21.6: Produkcja pary  $s\bar{s}$  w nukleonie.

Rozkłady kwarkowe spełniają szereg więzów. Całkowity ładunek protonu i neutronu ma postać:

$$q_p = \int dx \left[ \frac{2}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) - \frac{1}{3}(s(x) - \bar{s}(x)) \right] = 1 \quad (21.39)$$

$$\updownarrow = 0$$

$$q_n = \int dx \left[ \frac{2}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) - \frac{1}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{3}(s(x) - \bar{s}(x)) \right] = 0 \quad (21.40)$$

Rozwiązania:

$$\int dx (u(x) - \bar{u}(x)) = 2, \quad \int dx (d(x) - \bar{d}(x)) = 1, \quad \int dx (s(x) - \bar{s}(x)) = 0.$$

Kwarki walencyjne i kwarki morza:

$$u = u_v + q_s, \quad d = d_v + q_s, \quad \bar{u} = \bar{d} = \bar{s} = s = q_s$$

co daje

$$\int dx u_v(x) = 2, \quad \int dx d_v(x) = 1$$

Rozkłady kwarków są znormalizowane do ich liczby.

Pęd protonu:

$$\int dx x (u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) = 1 - \varepsilon.$$

Okazuje się, że  $\varepsilon \sim 45\%$ . Co niesie resztę pędu? Gluony.

## Reguła Gottfrieda

$$2F_1^p(x) = \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)],$$

$$2F_1^n(x) = \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)].$$

Policzmy różnicę

$$\begin{aligned} S_G &= \int dx (F_1^p(x) - F_1^n(x)) = \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{1}{3} [u(x) + \bar{u}(x)] - \frac{1}{3} [d(x) + \bar{d}(x)] \right) \\ &= \frac{1}{6} \int dx [u_v(x) - d_v(x)] + \frac{2}{6} \int dx [q_s(x) - \bar{q}_s(x)] = \frac{1}{6} \simeq 0.17. \end{aligned}$$

Eksperyment: 0.13.

Uniwersalność rozkładów partonowych.