

20 Rozpraszanie

Podstawową metodą badawczą w doświadczalnej fizyce cząstek czy fizyce jądrowej są procesy rozpraszania. W procesach rozpraszania badamy, jakie jest prawdopodobieństwo, że układ eksperymentalny przejdzie z przygotowanego przez nas stanu początkowego $|i\rangle$ (ang. *initial*) do jakiegoś stanu końcowego $|f\rangle$ (ang. *final*). Typowo stan początkowy to dwie cząstki, np. jedna padająca, a druga spoczywająca, albo dwie cząstki padające na siebie czołowo. Zderzenie może być *elastyczne*, kiedy cząstki po prostu zmieniają trajektorię ruchu, albo *nieelastyczne*, kiedy wyprodukuje się szereg nowych cząstek. Procesy te muszą zająć zgodnie z ogólnymi prawami zachowania energii, pędu, ładunku itd., a odpowiednie wyrażenia na takie prawdopodobieństwo otrzymuje się przy pomocy lagrangianu (a ściślej mówiąc odpowiadającego mu hamiltonianu) opisującego oddziaływania interesujących nas obiektów (cząstki, jądra, molekuly).

Innym procesem, który badamy doświadczalnie, jest rozpad cząstki, która może zgodnie z danym hamiltonianem zniknąć „zamieniając się” w kilka innych cząstek. Typowym przykładem, już przez nas omawianym, jest rozpad beta. Procesy te opisujemy przy pomocy operatora rozpraszania, zwanego w skrócie macierzą¹ S . Teorię rozpraszania sformułujemy w kwantowo-mechanicznym obrazie oddziaływania, gdzie hamiltonian oddziaływania jest funkcją *pól kwantowych*. Teoria pola nie jest przedmiotem tego wykładu, ale dla wyjaśnienia przytoczymy kilka najważniejszych informacji dotyczących konstruowania elementów macierzowych operatora S .

Już przy dyskusji oddziaływań elektroślabych wprowadziliśmy pojęcie gęstości Lagrange \mathcal{L} , który jest funkcjonalem *klasycznych* pól, np. pola skalarne φ , czteropotentcału A_μ , czy pól fermionowych. Kwantyzacja takiego lagrangianu polega na skonstruowaniu – przez analogię z mechaniką klasyczną – operatora Hamiltona wyrażonego przez operatory pola:

$$\mathcal{L}(\partial\varphi, \varphi) \rightarrow \mathcal{H}(\pi, \varphi) \rightarrow \hat{\mathcal{H}}(\hat{\pi}, \hat{\varphi}) \quad \text{gdzie} \quad \pi, \varphi \rightarrow \hat{\pi}, \hat{\varphi}.$$

Operatory pola rozkłada się na mody Fourier’a, a współczynnikami w tym rozkładzie są znane nam z mechaniki kwantowej operatory kreacji i anihilacji:

$$\hat{\varphi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left(\frac{\hat{a}_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} + \frac{\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger}{\sqrt{2E_p}} e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} \right)$$

gdzie $E_p^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Przyjęta w powyższym wzorze normalizacja zostanie szczegółowo omówiona później. Operatory pola działają w przestrzeni Focka, którą konstruujemy działając odpowiednią liczbą operatorów kreacji na stan próżni. Typowym stanem początkowym w procesie rozpraszania jest stan dwuczastkowy:

$$|i\rangle = |p_1, p_2\rangle = a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |0\rangle$$

¹Macierzą, bo tak na prawdę interesuje nas przejście $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, czyli pewien konkretny element macierzowy operatora rozpraszania, mianowicie S_{fi} .

a stanem końcowym, stan wielocząstkowy:

$$|f\rangle = |p'_1, p'_2 \dots p'_n\rangle = a_{p'_1}^\dagger a_{p'_2}^\dagger \dots a_{p'_n}^\dagger |0\rangle.$$

Obliczanie elementów macierzy S_{fi} polega na wielokrotnym komutowaniu operatorów $\hat{a}_{\vec{p}}$ i $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, tak aby wszystkie operatory kreacji były po lewej stronie, a operatory anihilacji po prawej. Taki element macierzowy jest równy zero, a powstałe w wyniku komutacji wyrażenia dają niezerowe przyczynki do S_{fi} .

20.1 Obraz oddziaływania

Przypomnijmy, że w obrazie Schrödingera ewoluują stany, a nie operatory. Podzielmy hamiltonian na część swobodną i część opisującą oddziaływanie i zapiszmy zależne od czasu równanie Schrödingera w obrazie Schrödingera (kładziemy $\hbar = 1$)²:

$$\begin{aligned} H^S &= H_0^S + H_1^S, \\ i\partial_t |\alpha(t)\rangle^S &= H^S |\alpha(t)\rangle^S. \end{aligned} \quad (20.1)$$

Definiujemy operatory i stany w obrazie oddziaływania (interakcji, Tomonagi):

$$\begin{aligned} O^I(t) &\stackrel{\text{df}}{=} e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} \rightarrow H_0^I = H_0^S = H_0, \\ |\alpha(t)\rangle^I &\stackrel{\text{df}}{=} e^{iH_0^S} |\alpha(t)\rangle^S. \end{aligned} \quad (20.2)$$

i przepisujemy równanie Schrödingera z użyciem (20.2) pomijając indeks S przy H_0 :

$$\begin{aligned} i\partial_t |\alpha(t)\rangle^I &= -H_0 e^{iH_0} |\alpha(t)\rangle^S + e^{iH_0} i\partial_t |\alpha(t)\rangle^S \\ &= -H_0 |\alpha(t)\rangle^I + e^{iH_0} \underbrace{H e^{-iH_0 t} e^{iH_0}}_{=1} |\alpha(t)\rangle^S \\ &= (-H_0 + H^I) |\alpha(t)\rangle^I = H_1^I |\alpha(t)\rangle^I. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Widzimy, że stany kwantowe ewoluują poprzez hamiltonian oddziaływania w obrazie oddziaływania: $H_1^I = e^{iH_0 t} H_1^S e^{-iH_0 t}$. Jednocześnie musimy zapisać równanie na operatory:

$$i\partial_t O^I(t) = i\partial_t (e^{iH_0 t} O^S e^{-iH_0 t}) = -H_0 O^I(t) + O^I(t) H_0 = [O^I(t), H_0]. \quad (20.4)$$

20.2 Operator ewolucji

Zdefiniujemy teraz operator ewolucji $U^I(t, t_0)$ i przepisujemy przy jego pomocy równanie (20.3)

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle^I &= U^I(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle^I, \\ i\partial_t U^I(t, t_0) &= H_1^I(t) U^I(t, t_0). \end{aligned} \quad (20.5)$$

²Oznaczyliśmy operatory w obrazie Schrödingera przez górny indeks S .

Warunek początkowy dla operatora ewolucji jest dość oczywisty

$$U^I(t_0, t_0) = 1. \quad (20.6)$$

Ponieważ na ogół hamiltonian oddziaływania w dwóch różnych chwilach nie komutuje

$$[H_1^I(t), H_1^I(t')] \neq 0 \quad (20.7)$$

rozwiązanie równania (20.5) nie jest zwykłą eksponentą. Aby znaleźć rozwiązanie przepismy równanie różniczkowe (20.5) w postaci całkowej:

$$U^I(t, t_0) = \mathbf{1} + (-i) \int_{t_0}^t H_1^I(t') U^I(t', t_0) dt'. \quad (20.8)$$

Rzeczywiście, różniczkując (20.8) otrzymujemy (20.5):

$$i\partial_t U^I(t, t_0) = (-i)i\partial_t \int_{t_0}^t H_1^I(t') U^I(t', t_0) dt' = H_1^I(t) U^I(t, t_0).$$

Równanie całkowe można rozwiązać iteracyjnie (rachunek zaburzeń):

$$U^I(t, t_0) = \mathbf{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt' H_1^I(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t') H_1^I(t'') + \dots \quad (20.9)$$

Wprowadźmy uporządkowanie czasowe T

$$T(H_1^I(t_1) H_1^I(t_2) \dots H_1^I(t_n)) = H_1^I(t_{i_1}) H_1^I(t_{i_2}) \dots H_1^I(t_{i_n})$$

gdzie: $t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \dots \geq t_{i_n}$

(20.10)

Wówczas

$$\int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t') H_1^I(t'') = \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' T(H_1^I(t') H_1^I(t'')). \quad (20.11)$$

Równanie (20.11) uogólnia się na wyższe potęgi:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) H_1^I(t_2) \dots H_1^I(t_n)$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(H_1^I(t_1) H_1^I(t_2) \dots H_1^I(t_n)). \quad (20.12)$$

Ostatecznie mamy

$$U^I(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_1^I(t')} = T e^{-i \int_{t_0}^t d^4 x' \mathcal{H}_1^I(x')}$$

gdzie $\mathcal{H}_1^I(x')$ jest gęstością hamiltonianu oddziaływania w obrazie interakcji. Od tej pory opuszczamy wskaźnik „ I ” przyjmując, że wszystkie operatory są w obrazie oddziaływania.

20.3 Macierz S

Zdefiniujemy teraz macierz rozpraszania (ang. *scattering matrix*) S . W dalekiej przeszłości przygotowujemy swobodny stan $|i\rangle$, który w czasie ewolucji do chwili t zamienił się w stan $|\psi\rangle$:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\psi(t)\rangle = |i\rangle. \quad (20.13)$$

Pytamy, jaka jest amplituda prawdopodobieństwa, że w dalekiej przyszłości otrzymamy stan $|f\rangle$:

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle f | \psi(t) \rangle = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \langle f | U(t_2, t_1) | i \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \langle f | S | i \rangle \quad (20.14)$$

lub

$$S = U(\infty, -\infty). \quad (20.15)$$

Ponieważ ewolucja zachowuje normę stanu

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle \\ \langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle &= \langle \alpha(t_0) | \underbrace{U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0)}_{=1} | \alpha(t_0) \rangle = \langle \alpha(t_0) | \alpha(t_0) \rangle \end{aligned}$$

operator U jest unitarny, więc S jest też unitarny. Formalnie

$$S = T e^{-i \int d^4 x' \mathcal{H}_1(x')} . \quad (20.16)$$

Korzystając ze wzoru (20.16) oraz znanej postaci operatora \mathcal{H}_1 możemy wyliczyć dowolne elementy macierzowe operatora S . Operator S warto podzielić na dwie części: operator jednostkowy (zerowy rząd w rozwinięciu eksponenty w (20.16)) odpowiadający sytuacji, w której nie doszło oddziaływania i część opisującą oddziaływanie:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) M_{fi}. \quad (20.17)$$

20.4 Prawdopodobieństwo przejścia

Widzimy, że wprowadzając macierz M_{fi} wydzieliliśmy jawnie deltę Diraka gwarantującą zachowanie energii i pędu ($P_{i,f}$ – całkowity czteropęd wszystkich cząstek odpowiednio w stanie początkowym i końcowym). Ponieważ prawdopodobieństwo przejścia $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ otrzymamy podnosząc S_{fi} do kwadratu, pojawi się wyrażenie zawierające kwadrat delty Diraka. Takie wyrażenie jest źle określone i żeby ominąć ten problem zamknijemy tymczasowo cały układ w (dużym) pudle o objętości przestrzennej $V = L^3$ i długości czasowej T , która odpowiada całkowitemu czasowi trwania procesu rozpraszania. Przypomnijmy, że w pudle wartości własne pędu są skwantowane:

$$\vec{p} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3), \quad (20.18)$$

gdzie n_i są liczbami całkowitymi. Funkcja delta Diraka występująca w normowaniu stanów o widmie ciągłym sprowadza się wtedy do delty Kroneckera

$$\delta^{(3)}(p - q) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{p,q}. \quad (20.19)$$

Podobnie możemy zapisać funkcję delta Diraka wyrażającą zachowanie energii

$$\delta(E_p - E_q) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^T dt e^{i(E_p - E_q)t} = \frac{T}{2\pi} \delta_{p,q}. \quad (20.20)$$

W tym przypadku T odgrywa rolę czasu, w którym zachodzi dany proces. Zatem związek pomiędzy stanami skwantowanymi w pudełku $|p^{\text{box}}\rangle$ z odpowiednimi stanami z kontinuum $|p\rangle$ jest następujący

$$|p^{\text{box}}\rangle = \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{1/2} |p\rangle. \quad (20.21)$$

Jeśli stany $|p\rangle$ są unormowane do delty Diraka (*bez żadnych dodatkowych czynników!*), to stany „w pudle” są unormowane do jedności

$$\langle q|p\rangle = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad \longrightarrow \quad \langle q^{\text{box}}|p^{\text{box}}\rangle = \delta_{q,p}.$$

W tym przypadku poprawnie unormowane prawdopodobieństwo przejścia od stanu początkowego $|i^{\text{box}}\rangle$ (zawierającego N_i cząstek o pędach, $p_1^{\text{box}}, \dots, p_{N_i}^{\text{box}}$) do stanu końcowego $|f^{\text{box}}\rangle$ (zawierającego N_f cząstek o pędach, $q_1^{\text{box}}, \dots, q_{N_f}^{\text{box}}$) możemy zapisać w postaci

$$P(i \longrightarrow f) = |S_{fi}^{\text{box}}|^2 = (2\pi)^8 \left[\delta_{\text{box}}^{(4)}(P_f - P_i) \right]^2 |M_{fi}^{\text{box}}|^2, \quad (20.22)$$

gdzie założyliśmy że $f \neq i$. Wyrażenie δ_{box} należy rozumieć w sensie równań (20.19) i (20.20). Teraz jedną z delt Diraka zapiszemy przy pomocy (20.19) i (20.20) opuszczając delty Kroneckera, gdyż równość indeksów tych delt gwarantuje druga funkcja δ_{box} , którą zachowamy w oryginalnej postaci:

$$P(i \longrightarrow f) = VT (2\pi)^4 \delta_{\text{box}}^{(4)}(P_f - P_i) \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{N_f + N_i} |M_{fi}|^2. \quad (20.23)$$

Zauważmy, że element M_{fi} nie ma już oznaczenia „box” i powinien być obliczony w granicy $L, T \rightarrow \infty$. Podobnie możemy opuścić indeks „box” przy delcie Diraka.

Wyrażenie (20.26) jest w gruncie rzeczy gęstością prawdopodobieństwa opisującą przejście między dwoma dyskretnymi stanami. Aby otrzymać skończone wielkości musimy pomnożyć (20.26) przez gęstość stanów końcowych dN_f . W ten sposób otrzymujemy różniczkowe prawdopodobieństwo przejścia

$$dP(i \longrightarrow f) = P(i \longrightarrow f) dN_f. \quad (20.24)$$

Pracując ciągle ze stanami unormowanymi w pudle, znajdujemy gęstość stanów końcowych posługując się wzorem

$$dN_f = \frac{V d^3 q_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{V d^3 q_{N_f}}{(2\pi)^3}. \quad (20.25)$$

Podstawiając wyrażenie (20.26) i (20.25) w równanie (20.24) otrzymujemy

$$dP(i \rightarrow f) = VT (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{N_i} |M_{fi}|^2 d^3 q_1 \dots d^3 q_{N_f}. \quad (20.26)$$

Z powyższego wyrażenia możemy otrzymać różniczkowe tempo przejścia (prawdopodobieństwo na jednostkę czasu)

$$\begin{aligned} d\Gamma(i \rightarrow f) &= \frac{dP(i \rightarrow f)}{T} \\ &= V (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{N_i} |M_{fi}|^2 d^3 q_1 \dots d^3 q_{N_f}. \end{aligned} \quad (20.27)$$

Aby obliczyć element macierzowy M_{fi} trzeba rozwinąć operator (20.16) do interesującego nas rzędu. Jest to zadanie z teorii pola, na szczęście dzięki Richardowi Feynmanowi można to zrobić stosunkowo prosto posługując się diagramami Feynmana. W podręcznikach podaje się reguły Feynmana nie dla M_{fi} , ale dla wielkości, z której wyciągnięto czynniki normalizacyjne dla cząstek zewnętrznych. Po pierwsze wyciąga się czynnik $1/\sqrt{(2\pi)^3}$, który pojawia się w normalizacji funkcji falowej. Po drugie, ponieważ cząstki zewnętrzne są na powłoce masy, to tak na prawdę prawdopodobieństwo różniczkowe powinno zawierać czynnik

$$d^4 q \delta(q^2 - m^2) = \frac{d^3 q}{2E(q)},$$

gdzie $E(q) = \vec{q}^2 + m^2$. Dodatkowo, w zależności od przyjętego unormowania rozwiązań równania Diraka mogą pojawić się w mianowniku masy fermionów w stanie końcowym. Definiujemy zatem element macierzowy \mathcal{M}_{fi}

$$M_{fi} = \left[\frac{1}{(2\pi)^3 2E(p_1)} \cdots \frac{1}{(2\pi)^3 2E(p_{N_i})} \frac{1}{(2\pi)^3 2E(q_1)} \cdots \frac{1}{(2\pi)^3 2E(q_{N_f})} \right]^{1/2} \mathcal{M}_{fi}, \quad (20.28)$$

co pozwala nam przepisać wzór (20.27) w postaci

$$\begin{aligned} d\Gamma(i \rightarrow f) &= V \frac{1}{2VE(p_1)} \cdots \frac{1}{2VE(p_{N_i})} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E(q_1)} \cdots \frac{d^3 q_{N_f}}{(2\pi)^3 2E(q_{N_f})}. \end{aligned} \quad (20.29)$$

20.5 Różniczkowe prawdopodobieństwo rozpadu

Przypadek $N_i = 1$ odpowiada sytuacji, gdy mamy tylko jedną cząstkę w stanie początkowym. W tej sytuacji wzór (20.29) opisuje nic innego tylko tempo rozpadu tej cząstki:

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{2E(p_1)} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - p_1) \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E(q_1)} \cdots \frac{d^3 q_{N_f}}{(2\pi)^3 2E(q_{N_f})}.$$

Wprowadzając oznaczenie na niezmienniczą przestrzeń fazową

$$dQ_f = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - p_1) \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E(q_1)} \cdots \frac{d^3 q_{N_f}}{(2\pi)^3 2E(q_{N_f})} \quad (20.30)$$

możemy zwięźle napisać

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{2E(p_1)} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dQ_f. \quad (20.31)$$

Całkowite tempo rozpadu otrzymujemy po scałkowaniu po przestrzeni fazowej i zsumowaniu wszystkich możliwych kanałów rozpadu

$$\Gamma(i) = \frac{1}{2E(p_1)} \sum_f \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 dQ_f. \quad (20.32)$$

Warto zaznaczyć, że suma we wzorze (20.32) może zawierać także sumę po polaryzacjach cząstek, w przypadku chromodynamiki po „kolorach”, etc. Tempo rozpadu $\Gamma(i)$ określa ułamek początkowej ilości cząstek, które rozpadną się w jednostce czasu

$$\Gamma(i) = -\frac{dN_i}{N_i dt}. \quad (20.33)$$

Znak minus związany jest z faktem, że dN_i jest ujemne. Jeśli tempo rozpadu jest niezależne od czasu, to całkując powyższe równanie otrzymujemy prawo wykładnicze

$$N_i(t) = N_i(0) \exp(-\Gamma(i)t). \quad (20.34)$$

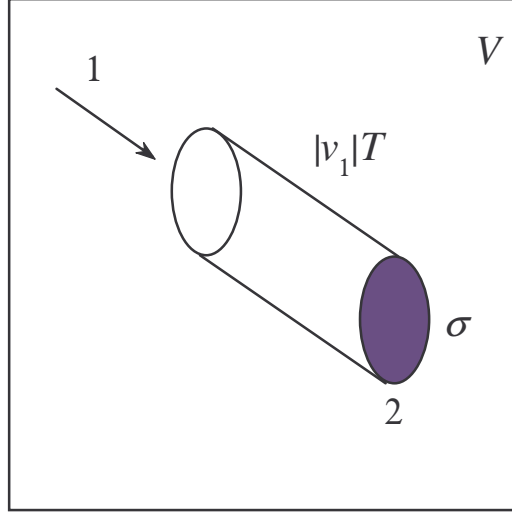
Odwrotność tempa rozpadu nazywamy czasem życia rozpatrywanej cząstki.

20.6 Przekrój czynny

Rozważmy proces

$$p_1 + p_2 \rightarrow q_1 + q_2 + \dots + q_n,$$

gdzie cząstka 1 uderza w spoczywającą cząstkę 2. Z cząstką 2 związany jest *efektywny* przekrój czynny σ na produkcję n cząstek. Jeśli cząstka 1 „trafi” w dysk o powierzchni



σ to prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe objętości walca o podstawie σ i długości $|\vec{v}_1|T$ podzielonej przez całkowitą objętość pudła:

$$P(1 + 2 \rightarrow n) = \frac{|\vec{v}_1|T\sigma_{1+2 \rightarrow n}}{V}. \quad (20.35)$$

Z drugiej strony jest ono dane przez wyrażenie (20.26) z uwzględnieniem (20.28), co daje

$$\begin{aligned} \sigma_{1+2 \rightarrow n} &= \frac{V}{|\vec{v}_1|T} VT \frac{1}{2VE(p_1)} \frac{1}{2VE(p_2)} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3 2E(q_1)} \dots \frac{d^3q_{N_f}}{(2\pi)^3 2E(q_{N_f})}. \end{aligned} \quad (20.36)$$

Czynniki V i T upraszczają się i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_{1+2 \rightarrow n} &= \frac{1}{4E_1 E_2 |\vec{v}_1|} \sum_{\substack{\text{polaryzacje} \\ \text{helicity}}} \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3 2E(q_i)} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n q_i), \end{aligned} \quad (20.37)$$

gdzie jawnie uwzględniliśmy sumę po polaryzacjach lub skrętnościach stanu końcowego. Jeżeli polaryzacje są mierzone to sumę należy opuścić.

Czynnik $F = 4E_1 E_2 |\vec{v}_1|$ nazywamy lorentzowsko niezmienniczym strumieniem. Ponieważ założyliśmy, że cząstka 2 spoczywa, mamy we wzorze tylko $|\vec{v}_1|$. Uogólnienie jego wzoru na przypadek, gdy obie cząstki poruszają się „na zderzenie czołowe” jest oczywiste:

$$F = 4E_1 E_2 |\vec{v}_1| \rightarrow 4E_1 E_2 (|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|) \quad (20.38)$$

Załóżmy, że cząstki lecą na przeciwko siebie wzdłuż osi z , mamy tylko jedną składową pędu $p_{1,2}$ i czteropędy wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, 0, 0, p_1), \\ p_2 &= (E_2, 0, 0, -p_2). \end{aligned}$$

Zatem (pamiętajmy, że $c = 1$) :

$$\begin{aligned} F &= 4E_1E_2 (|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|) = 4E_1E_2 \left(\frac{p_1}{E_1} + \frac{p_2}{E_2} \right) \\ &= 4(E_2p_1 + E_1p_2) \end{aligned}$$

i dalej

$$F^2 = 16 [(E_2p_1)^2 + (E_1p_2)^2 + 2E_1E_2p_1p_2]$$

Dla iloczynu czteropędów, mamy

$$(p_1 \cdot p_2)^2 = (E_1E_2 + p_1p_2)^2 = E_1^2E_2^2 + p_1^2p_2^2 + 2E_1E_2p_1p_2.$$

Dalej

$$\begin{aligned} F^2 &= 16 [(p_1 \cdot p_2)^2 + (E_2p_1)^2 + (E_1p_2)^2 - E_1^2E_2^2 - p_1^2p_2^2] \\ &= 16 [(p_1 \cdot p_2)^2 + E_2^2(p_1^2 - E_1^2) + p_2^2(E_1^2 - p_1^2)] \\ &= 16 [(p_1 \cdot p_2)^2 - (E_2^2 - p_2^2)(E_1^2 - p_1^2)]. \end{aligned}$$

Stąd

$$F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2m_2^2} \quad (20.39)$$

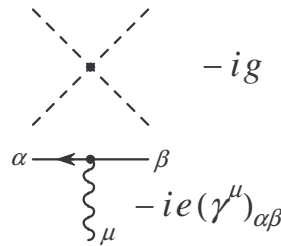
i jak widzimy jest niezmiennicze ze względu na transformacje Lorentza.

20.7 Elementy macierzowe i reguły Feynmana

Aby obliczyć \mathcal{M}_{fi} trzeba się posłużyć aparatem matematycznym teorii pola, którego przedstawienie wykracza poza zakres tego wykładu. Richard Feynman podał bardzo prostą metodę konstruowania macierzy rozpraszania w rachunku zaburzeń, która sprowadza się do rysowania diagramów. Każdemu typowi cząstki odpowiada linia, z którą stowarzyszone są pewne funkcje pędów, a także – w większości przypadków – macierze związane np. ze strukturą spinową, kolorem (lokalna grupa SU(3)) itd. Linie dzielimy na *zewewnętrzne*, odpowiadające cząstkom wchodzącym (stan $|i\rangle$) i wychodzącym (stan $|f\rangle$), oraz *wewnętrzne (propagatory)*, które powstają w wyniku tworzenia diagramu Feynmana. Liniom wewnętrznym odpowiadają czynniki pokazane na rysunku 20.1, natomiast liniom zewnętrznym pewne czynniki normalizacyjne, których tu nie wymieniamy. Przykłady reguł Feynmana dla cząstki skalarnej (linia przerywana), fermionu (linia ciągła) i fotonu (lub innego bozonu pośredniczącego – linia falista) pokazane są na rysunkach 20.1 i 20.2.

$$\begin{aligned}
i\Delta_F(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} && \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\
iS_F(p) &= \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} && \bullet \text{---} \leftarrow \bullet \\
&= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \\
iD_F(p)_{\mu\nu} &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} && \bullet \text{---} \text{~~~~} \text{---} \bullet \\
&\text{(cechowanie!)}
\end{aligned}$$

Rysunek 20.1: Propagatory cząstki skalarnej, fermionu i bezmasowej cząstki wektorowej w cechowaniu Feynmana.



Rysunek 20.2: Przykładowe wierzchołki w teorii ϕ^4 i w elektrodynamice.

Oprócz linii występują tzw. wierzchołki (ang. *vertex*) wskazujące jak cząstki, reprezentowane przez linie, mogą ze sobą oddziaływać. Wierzchołki odpowiadają hamiltonianowi oddziaływania H_1^I . Wierzchołki wskazują po pierwsze, jakie oddziaływania są w ogóle możliwe, a po drugie stowarzyszone są z nimi funkcje pędów i macierze.

Widzimy, że najprostszą strukturę ma propagator cząstki skalarnej: jest to po prostu funkcja $1/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$, gdzie masa m jest masą tej cząstki. Mała część urojona wskazuje, jak należy obchodzić osobliwości dla $p^2 = m^2$ w ewentualnych całkach po p . Na rysunku 20.2 pokazano wierzchołek w tzw. teorii ϕ^4 , który jest po prostu stałą g , którą określa się jako *stałą sprzężenia*. W teorii pola rozważa się inne możliwe sprzężenia, np. trzycząstkowe.

Diagramy Feynmana konstruujemy w następujący sposób: rysujemy linie odpowiadające cząstkom wchodzącym i wychodzącym, a następnie łączymy je przy pomocy minimalnej liczby wierzchołków i linii wewnętrznych.

Zanim rozważymy rozpraszanie $2 \rightarrow 2$ warto wprowadzić powszechnie używane zmienne Mandelstamma. W przypadku rozpraszania elastycznego dwóch cząstek o czteropędach

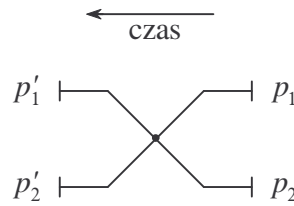
$p_{1,2}$ i masach $m_{1,2}$ przechodzących w $p'_{1,2}$ definiujemy:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2, \\ t &= (p'_1 - p_1)^2 = (p'_2 - p_2)^2, \\ u &= (p'_1 - p_2)^2 = (p'_2 - p_1)^2. \end{aligned} \quad (20.40)$$

Nie są to zmienne niezależne gdyż

$$s + t + u = 2(m_1^2 + m_2^2) \quad (20.41)$$

W teorii ϕ^4 w najniższym rzędzie rachunku zaburzeń dla procesu $2 \rightarrow 2$ $\mathcal{M}_{fi} \sim g$, a jedyny możliwy proces rozpraszania to $2 \rightarrow 2$. Nie zachodzi proces $2 \rightarrow 3$, a najprostszy rozpad to $1 \rightarrow 3$.



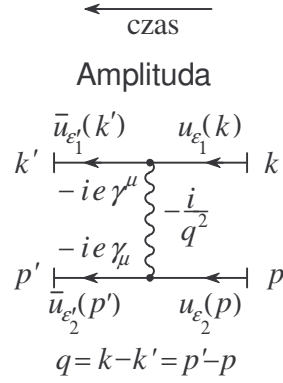
Rysunek 20.3: Rozpraszanie $2 \rightarrow 2$ w teorii skalarniej ϕ^4 .

W teorii z fermionami (np. elektrodynamika) sytuacja jest bardziej skomplikowana. Propagatory są macierzami 4×4 , którym odpowiadają indeksy α i β . Wynika to stąd, że w relatywistycznej mechanice kwantowej (teorii pola) funkcja falowa fermionu nie jest skalarem, ale obiektem 4 wymiarowym (tzw. bispinorem Diraca). Dwie górne składowe odpowiadają cząstkom o dwóch różnych rzutach spinu na oś kwantyzacji, natomiast dwie dolne składowe antycząstkom. W tej przestrzeni działają czterowymiarowe macierze Diraka $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$, gdzie indeks $\mu = 0, 1, 2$ i 3 jest indeksem Lorentza. Bardzo często występujący w teorii relatywistycznej iloczyn macierzy Diraka i jakiegoś czterowektora (np. pędu) oznaczamy przekreśleniem

$$\gamma^\mu p_\mu = \not{p}.$$

Z kolei propagator fotonu proporcjonalny jest do tensora metrycznego $g_{\mu\nu}$ (w tzw. cechowaniu Feynmana), co wiąże się z tym, że funkcja falowa fotonu jest w teorii pola związana z czteropotencjałem A^μ . Sprzężenie foton-fermion proporcjonalne jest do macierzy $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ oraz stałej sprzężenia, którą w tym wypadku jest ładunek elektryczny e . Pierwszy nieznikający przyczynik do amplitudy rozpraszania dwóch fermionów pokazany jest na rysunku 20.4. Funkcje u_ε są wspomnianymi wyżej czynnikami normalizacyjnymi (w rzeczywistości są to bispinory Diraka dla cząstki swobodnej o określonym pędzie i rzucie spinu na oś kwantyzacji).

Na koniec rozważmy proces zwany formacją rezonansu. Typowym przykładem jest tu anihilacja e^+e^- na jeden foton, lub na mezony wektorowe, które następnie mogą rozpaść się na cokolwiek, my tu rozważymy rozpad na kwark i antykwark. Ponieważ nie interesują



Rysunek 20.4: Rozpraszanie $2 \rightarrow 2$ w elektrodynamice.

nas produkty rozpadu (byleby w stanie końcowym były hadrony) nie rozpatrujemy szczególnie co dalej dzieje się z parą kwark-antykwar: zakładamy, że z prawdopodobieństwem równym 1 zamieniają się one w cząstki fizyczne.

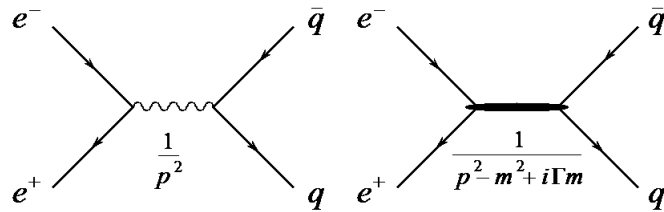
Podane wyżej reguły Feynmana dotyczą elementarnych cząstek stabilnych. Jednakże cząstki produkowane w zderzeniu e^+e^- to niestabilne rezonanse. Fakt, że cząstka może się rozpadać, a więc że jej funkcja falowa „znika”, uwzględnia się przez dodanie do masy cząstki części urojonej

$$m \rightarrow m - i\frac{\Gamma}{2}. \quad (20.42)$$

To powoduje, że dla cząstki nierelatywistycznej, której energia $E \simeq m$ część czasowa funkcji falowej

$$e^{-iEt} \rightarrow e^{-imt} e^{-\Gamma t/2}. \quad (20.43)$$

Po takiej zmianie, propagator cząstki masowej dostaje „naturalną” część urojoną, tak jak to pokazano na rysunku 20.5.



Rysunek 20.5: Formacja rezonansu w kanale s .

Po podniesieniu amplitudy do kwadratu, przyjmując kinematykę układu centrum masy

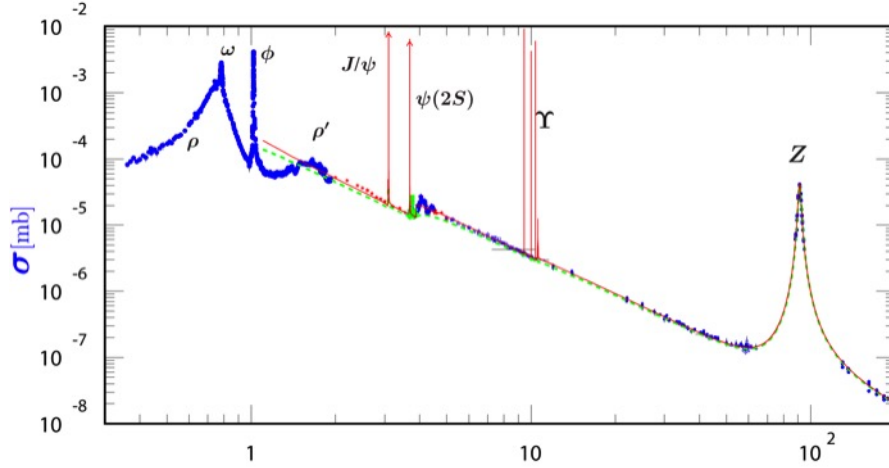
$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, \vec{p}), \\ p_2 &= (E_1, -\vec{p}) \end{aligned}$$

poza licznikiem pojawia się mianownik postaci (Breit-Wigner)

$$\sigma \sim \frac{1}{(E^2 - m^2)^2 + \Gamma^2 m^2} \quad (20.44)$$

gdzie $E = E_1 + E_2$. Zauważmy, że w tym układzie $E = \sqrt{s}$.

Na rysunku 20.6 pokazano przekrój czynny (20.44) w funkcji $E = \sqrt{s}$. Widzimy szereg rezonansów wektorowych począwszy od ρ^0 poprzez rezonanse złożone z ciężkich kwarków $Q\bar{Q}$ aż po bozon Z , które pojawiają się jako wzmocnienia (z ang. *peaks*) funkcji $\sigma(E)$ wokół $E = m_R$, gdzie m_R to masa rezonansu. Szerokość tych wzmocnień jest proporcjonalna do $\Gamma_R \sim 1/t_R$.

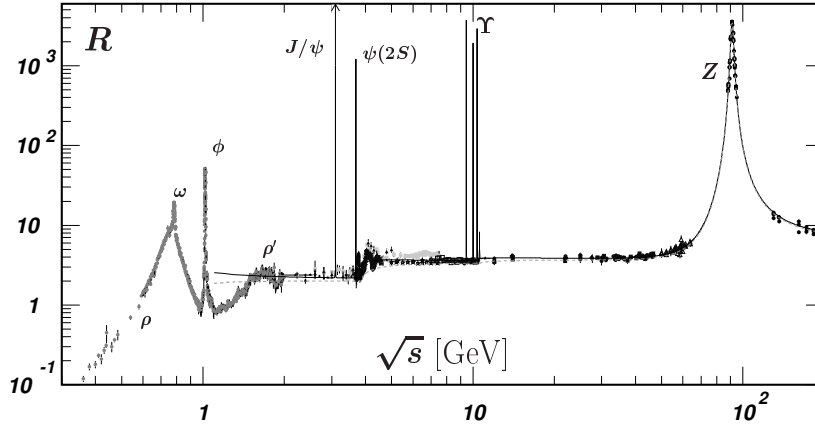


Rysunek 20.6: Formacja rezonansów w kanale s – przekroj czynny.

Zamiast przekroju czynnego, który silnie maleje z energią, wygodnie jest wykreślić stosunek

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{hadrony}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}}, \quad (20.45)$$

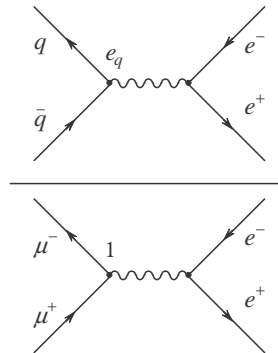
(patrz Rysunek 20.7) w którym nieinteresujące nas czynniki normalizacyjne się kasują (patrz Rysunek 20.8) i który niesie dynamiczną informację dotyczącą produkcji rezonansów. Poza obszarem wzmocnień rezonansowych R jest prawie niezależny od energii, za wyjątkiem progowych skoków kiedy całkowita energia zderzenia przekracza wartość $2m_q$. Od tego punktu mogą się zacząć produkować pary kwark-antykwarok o masie m_q każdy. Ponieważ w stanie końcowym obserwujemy tylko hadrony, stosunek R poza obszarem rezonansowym jest po prostu proporcjonalny do kwadratów ułamków określających ładunki



Rysunek 20.7: Formacja rezonansów w kanale s – stosunek R .

kwarków, które mogą się wyprodukować przy danej energii:

$$\begin{aligned}
 R &= e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}, \\
 R &= e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 + e_c^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}, \\
 R &= e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 + e_c^2 + e_b^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}.
 \end{aligned}
 \tag{20.46}$$



Rysunek 20.8: Stosunek amplitud na produkcję hadronów do muonów w zderzeniach e^+e^- . Kiedy energia zderzenia przekracza próg $2m_q$, otwiera się nowy kanał rozpadu i wartość stosunku R zmienia się skokowo. Czas płynie w lewo.

Patrząc na Rysunek 20.7 widzimy, że poniżej cząstki J/ψ , a więc poniżej progu na produkcję kwarków powabnych (ang. *charm threshold*) stosunek ten jest równy mniej

więcej 2, gdy tymczasem z równania (20.46) wynika, że powinien on wynosić $2/3$. Skąd bierze się ta rozbieżność? Otóż ze względu na to, że kwarki oddziałują silnie i należą do trójwymiarowej reprezentacji lokalnej grupy cechowania $SU(3)$ (kolor), kwadrat amplitudy pokazanej na rysunku zawiera sumowanie po wszystkich stanach tej reprezentacji, co daje dodatkowy czynnik 3. A zatem stosunek R upewnia nas w tym, że oddziaływania silne oparte są grupie cechowania $SU(3)$.