

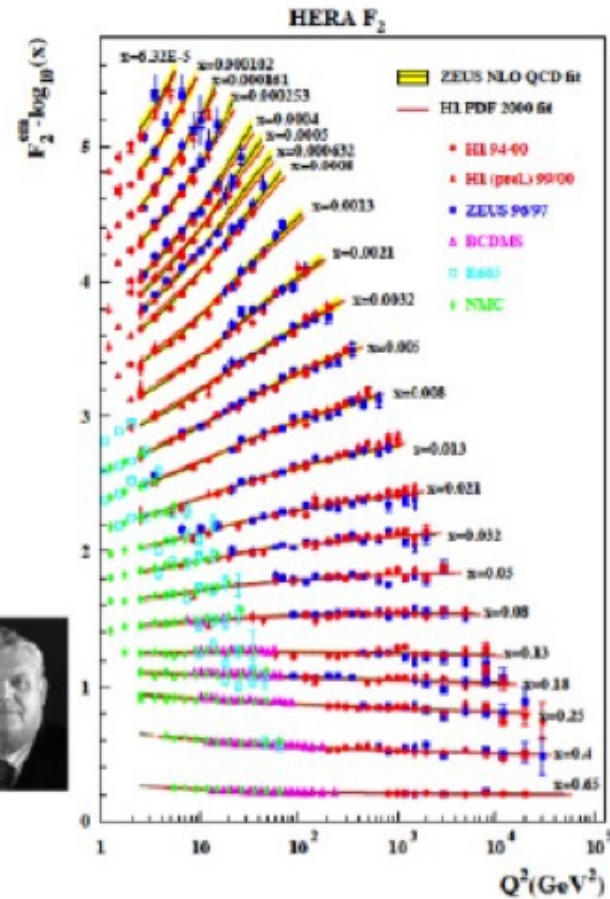
Rozpraszanie głęboko nieelastyczne ep (deep inelastic scattering)

1968: following James Bjorken suggestions MIT-SLAC experiment confirmed x scaling

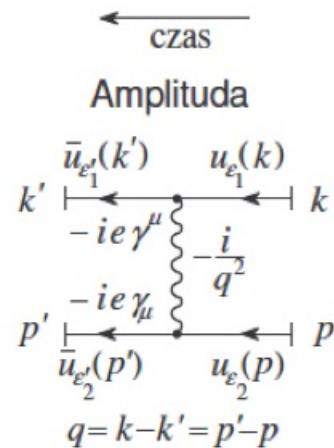
interpretation: Richard Feynman

Nobel 1990:

Jerome Friedman (MIT)
Henry Kendall (MIT)
Richard Taylor (SLAC)



Rozpraszanie elastyczne dwóch różnych fermionów



$$p = M(1, 0, 0, 0),$$

$$k = \omega(1, 0, 0, 1),$$

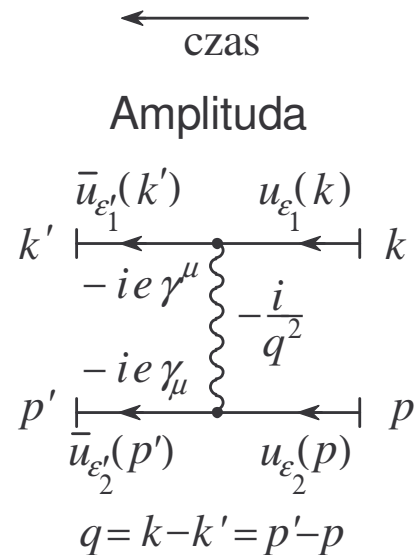
$$k' = \omega'(1, \sin\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\varphi, \cos\theta),$$

$$q = k - k' = p' - p.$$

Zauważmy, że przekaz czteropędu

$$q^2 = -2\omega\omega'(1 - \cos\theta) = -4\omega\omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Rozpraszanie elastyczne – przekrój czynny



$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^4k'}{(2\pi)^3} \delta(k'^2) \frac{d^4p'}{(2\pi)^3} \delta(p'^2 - M^2) (2\pi)^4 \delta(k + p - k' - p').$$

- wykonać całki z pomocą delt Diraka
- obliczyć $|\mathcal{M}_{fi}|^2$

Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{d\omega' d^3k' \delta(\omega'^2 - k'^2)}_{=I} \delta((p+q)^2 - M^2)$$

Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{d\omega' d^3 k' \delta(\omega'^2 - k'^2)}_{=I} \delta((p+q)^2 - M^2)$$

$$\begin{aligned} I &= \int d\omega' d^3 \vec{k}' \delta(\omega'^2 - k'^2) = \int k'^2 dk' d\varphi d \cos \theta d\omega' \delta(\omega'^2 - k'^2) \\ &= 2\pi \int d \cos \theta \frac{\omega'^2 d\omega'}{2\omega'} = \pi \int \omega' d\omega' d \cos \theta \end{aligned}$$

Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{d\omega' d^3 k' \delta(\omega'^2 - k'^2)}_{=I} \delta((p+q)^2 - M^2)$$

$$\begin{aligned} I &= \int d\omega' d^3 \vec{k}' \delta(\omega'^2 - k'^2) = \int k'^2 dk' d\varphi d \cos \theta d\omega' \delta(\omega'^2 - k'^2) \\ &= 2\pi \int d \cos \theta \frac{\omega'^2 d\omega'}{2\omega'} = \pi \int \omega' d\omega' d \cos \theta \end{aligned}$$

Wygodniej będzie posługiwać się innymi zmiennymi:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2 = 2\omega\omega'(1 - \cos \theta), \\ \nu &= \omega - \omega' \end{aligned}$$

Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{4M\omega} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{d\omega' d^3 k' \delta(\omega'^2 - k'^2)}_{=I} \delta((p+q)^2 - M^2)$$

$$\begin{aligned} I &= \int d\omega' d^3 \vec{k}' \delta(\omega'^2 - k'^2) = \int k'^2 dk' d\varphi d \cos \theta d\omega' \delta(\omega'^2 - k'^2) \\ &= 2\pi \int d \cos \theta \frac{\omega'^2 d\omega'}{2\omega'} = \pi \int \omega' d\omega' d \cos \theta \end{aligned}$$

Wygodniej będzie posługiwać się innymi zmiennymi:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2 = 2\omega\omega'(1 - \cos \theta), \\ \nu &= \omega - \omega' \end{aligned}$$

Jacobian:

$$d\omega' d \cos \theta = \left| \frac{d(\omega', \cos \theta)}{d(\nu, Q^2)} \right| dQ^2 d\nu = \frac{1}{2\omega\omega'} dQ^2 d\nu \quad \rightarrow \quad I = \frac{\pi}{2\omega} \int dQ^2 d\nu$$

Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{8M\omega^2} \frac{\pi}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dQ^2 d\nu \delta((p+q)^2 - M^2)$$

$$\delta((p+q)^2 - M^2) = \delta(2M\nu - Q^2) = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right).$$

Kinematyka

$$d\sigma = \frac{1}{8M\omega^2} \frac{\pi}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dQ^2 d\nu \delta((p+q)^2 - M^2)$$

$$\delta((p+q)^2 - M^2) = \delta(2M\nu - Q^2) = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right).$$

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{16M^2\omega^2} \frac{1}{4\pi} \int d\nu \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

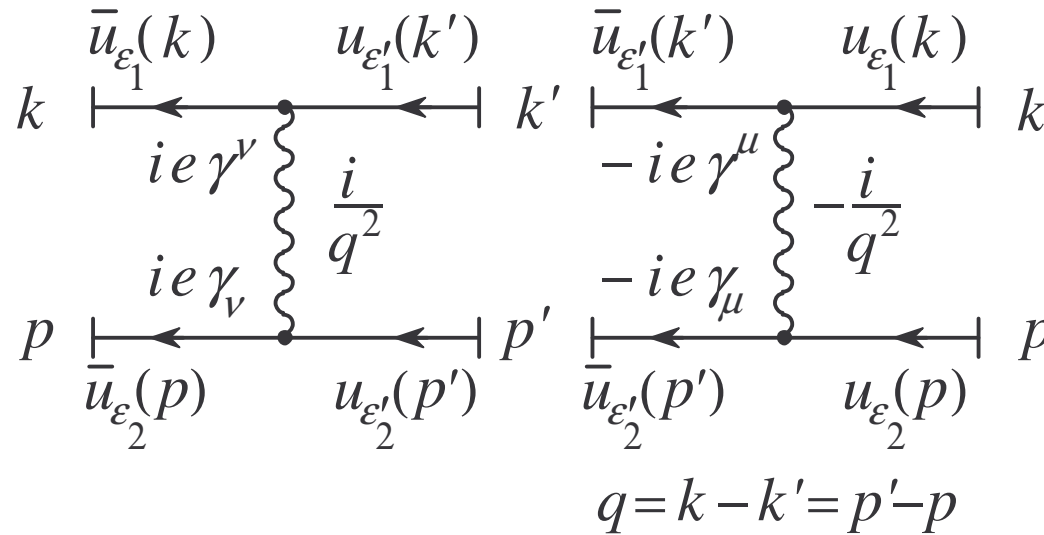
Kwadrat $|\mathcal{M}_{fi}|^2$

← czas

Amplituda †

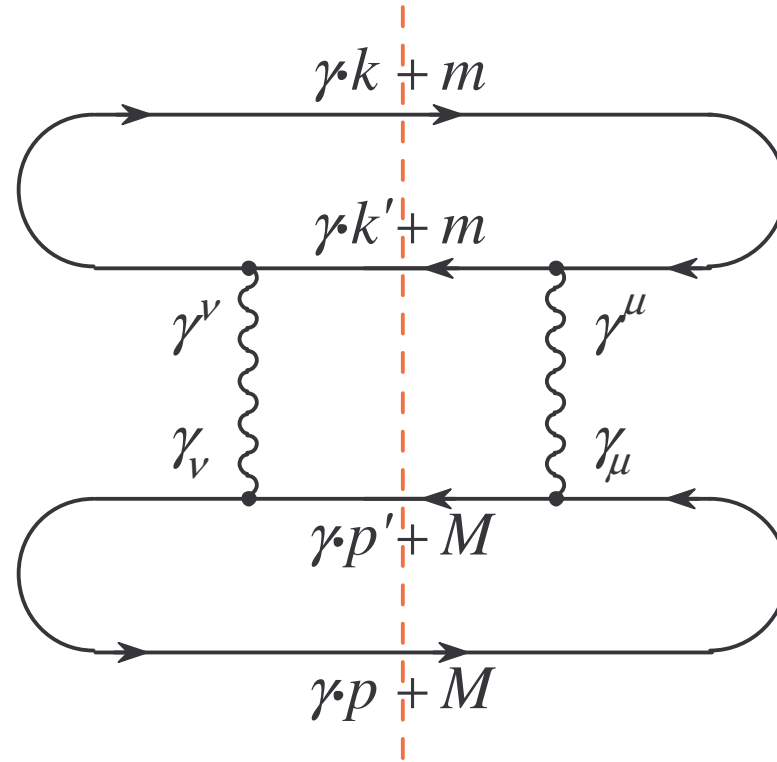
Amplituda

$$\frac{1}{4} \sum_{\varepsilon}$$



$$\sum_{\varepsilon} [u_{\varepsilon}(p)]_{\alpha} [\bar{u}_{\varepsilon}(p)]_{\beta} = (\gamma \cdot p + m)_{\alpha\beta}$$

Kwadrat $|\mathcal{M}_{fi}|^2$



$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e_1^2 e_2^2}{(q^2)^2} L^{\nu\mu}(k, k') L_{\nu\mu}(p, p').$$

Kwadrat $|\mathcal{M}_{fi}|^2$

$$L_{\nu\mu}(p, q) = 4 \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) + q^2 \left(g_{\nu\mu} - \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} \right)$$

Niezmienniczość względem cechowania

$$q^\nu L_{\nu\mu} = q^\mu L_{\nu\mu} = 0$$

Możemy uprościć zapis

$$L_{\nu\mu}(p, p') = \mathcal{A} p^\nu p'^\mu + \mathcal{B} g^{\nu\mu} \quad \mathcal{A} = 4, \quad \mathcal{B} = q^2 = -Q^2$$

Analogicznie dla $L^{\nu\mu}(k, k')$. Wynik:

$$p_\nu p_\mu L^{\nu\mu}(k, k') = 4M^2 \omega \omega' \cos^2 \frac{\theta}{2}$$
$$g_{\nu\mu} L^{\nu\mu}(k, k') = -8\omega \omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Elastyczny przekrój czynny

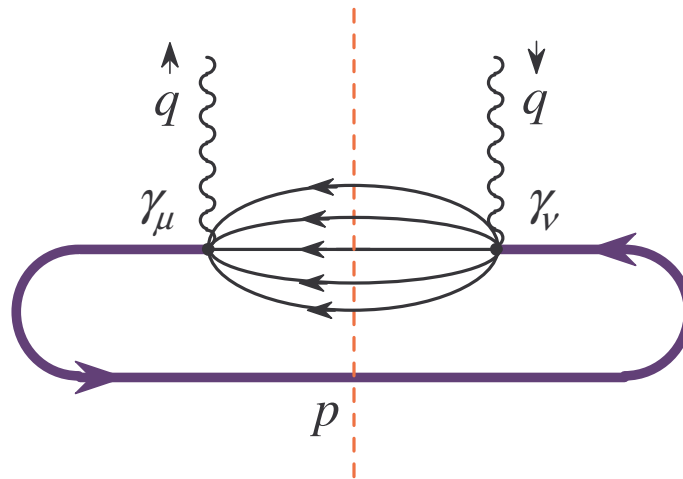
$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dQ^2} &= \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \int \frac{e_p^2}{\omega\omega'} \left\{ \frac{\mathcal{A}}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\mathcal{B}}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} d\nu \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2M} \right) \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{e_p^2}{\omega\omega'} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}.\end{aligned}$$

Uwagi:

- $$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$
- ładunek dolnego fermionu $e e_p$
- zmienne ω' i kąt rozproszenia θ nie są niezależne

Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – tensor hadronowy

Proton nie jest elementarny, rozpraszanie nie jest elastyczne $(p + q)^2 \neq M^2$



Pamiętamy

$$L_{\mu\nu}(p, p') = 4 \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) - q^2 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

dla protonu

$$W_{\mu\nu}(p, q) = \underbrace{4W_2}_{\mathcal{A}} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) + \underbrace{4M^2 W_1}_{-\mathcal{B}} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – skalowanie Bjorkena

Dla protonu $e_p = 1$, rozkład w dwóch zmiennych - nie ma $\delta(\nu - Q^2/2M)$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} &= \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^3\omega' \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ \frac{\mathcal{A}}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\mathcal{B}}{4M^2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^3\omega' \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}\end{aligned}$$

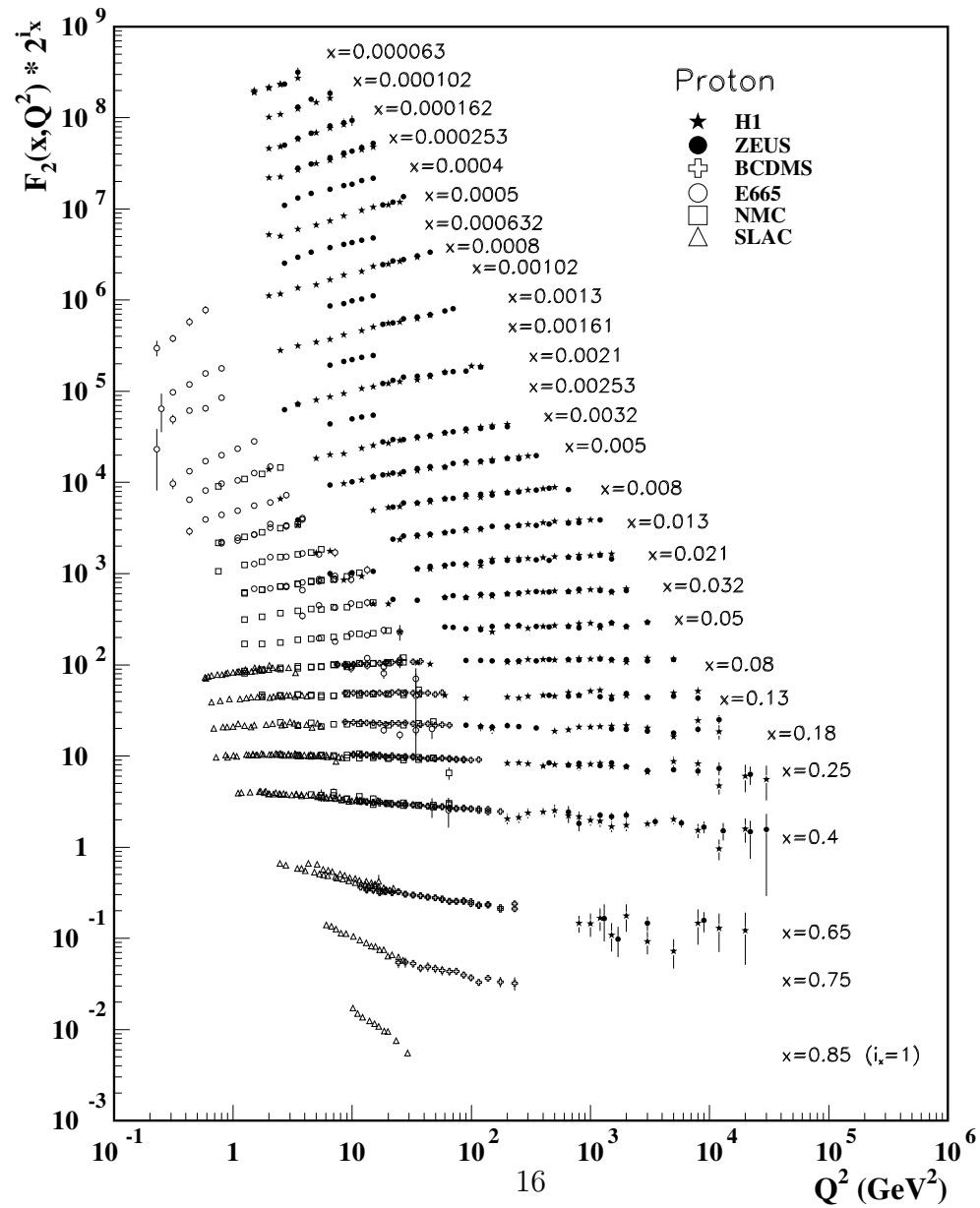
Okazuje się, że w granicy $Q^2, \nu \rightarrow \infty$ ale Q^2/ν -skończone, funkcje $W_{1,2}$ nie zależą od dwóch zmiennych Q^2 oraz ν , a od jednej, zwanej x – Bjorkena

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}$$

$$MW_1(Q^2, \nu) = F_1(x)$$

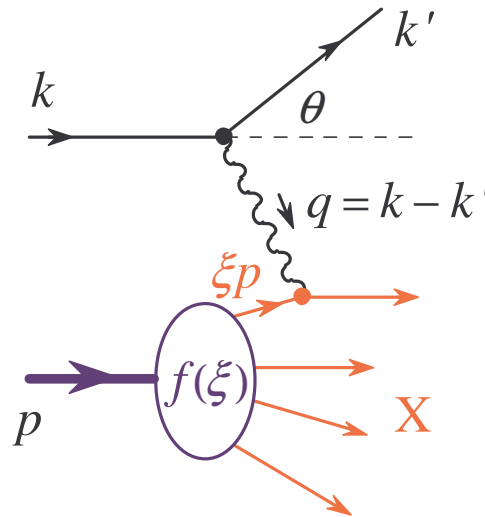
$$\nu W_2(Q^2, \nu) = F_2(x)$$

Skalowanie Bjorkena.



Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – model partonów

Model partonów:



- czas fluktuacji protonu: $\tau_p \sim 1/\Delta E$, czas oddziaływania: $\tau_{\text{coll}} \sim 1/\nu$, wybieramy układ gdzie $\tau_{\text{coll}} \ll \tau_p$
- $f(\xi)$ – prawd. znalezienia w protonie partonu o pędzie $p_\xi = \xi p$ (rysunek mylący)
- stąd: $0 < \xi < 1$
- przekrój czynny jest sumą po wszystkich partonach i całką po $d\xi f(\xi)$.

Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – model partonów

Problem z kinematyką: partony są bezmasowe (lub mają małe masy), a my wybraliśmy

$$p = M(1, 0, 0, 0)$$

tzn., że masa partonu $m_\xi = \xi M$. Wtedy zachowanie czteropędu w wierzchołku

$$(\xi p + q)^2 = m_\xi^2$$

daje

$$\xi^2 M^2 + 2\xi M\nu - Q^2 = \xi^2 M^2 \rightarrow \xi = \frac{Q^2}{2M\nu} = x$$

Aby dostać przekrój czyny na takim partonie, należy we wzorze na rozpraszanie elastyczne zamienić

$$M \rightarrow \xi M$$

Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – model partonów

Przekrój czynny

$$\left. \frac{d\sigma_i}{dQ^2 d\nu} \right|_{\text{partonowy}} = \frac{\pi\alpha^2 e_i^2}{4\omega^3 \omega' \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{4\xi^2 M^2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \delta \left(\nu - \frac{1}{\xi} \frac{Q^2}{2M} \right)$$

i dalej

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \sum_i \int d\xi_i f_i(\xi_i) \left. \frac{d\sigma_i}{dQ^2 d\nu} \right|_{\text{partonowy}} = \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^3 \omega' \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}$$

co daje ($x = \frac{Q^2}{2M\nu}$):

$$W_2 = \sum_i e_i^2 \int d\xi f_i(\xi) \delta \left(\nu - \nu \frac{x}{\xi} \right) = \sum_i e_i^2 \int d\xi f_i(\xi) \frac{\xi^2}{\nu x} \delta(\xi - x) = \frac{1}{\nu} \sum_i e_i^2 x f_i(x)$$

$$W_1 = \sum_i e_i^2 \int d\xi f_i(\xi) \frac{Q^2}{4\xi^2 M^2} \frac{\xi^2}{\nu x} \delta(\xi - x) = \frac{1}{2M} \sum_i e_i^2 f_i(x).$$

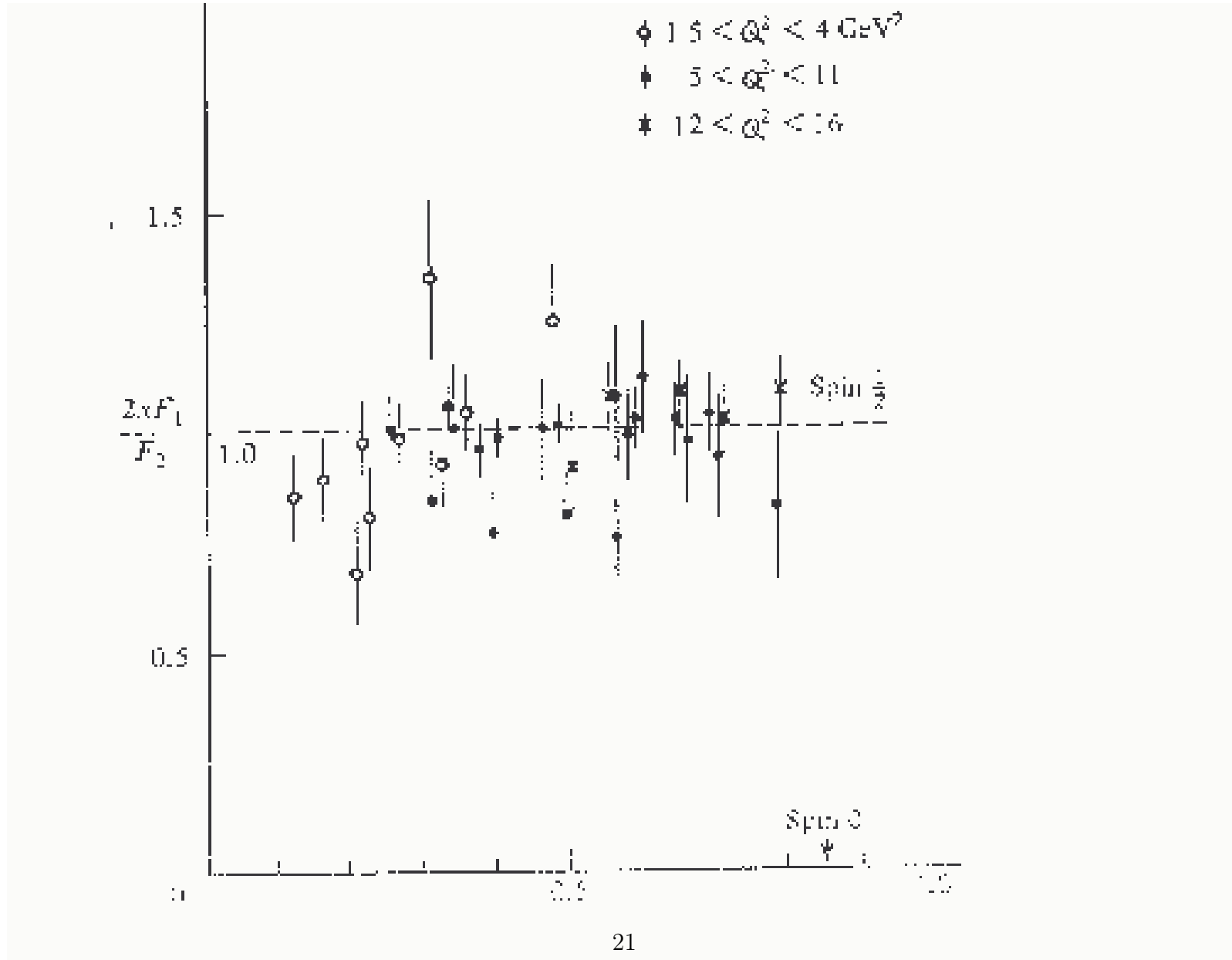
Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – model partonów

Definiujemy

$$F_2(x) = \nu W_2 = x \sum_i e_i^2 f_i(x)$$
$$F_1(x) = MW_1 = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x)$$

Mamy pierwsze przewidywanie (relacja Callana-Grossa)

$$F_2(x) = 2xF_1(x)$$



Kwarki jako partony

$$F_2^p(x) = \frac{4}{9}x [u_p(x) + \bar{u}_p(x)] + \frac{1}{9}x [d_p(x) + \bar{d}_p(x) + s_p(x) + \bar{s}_p(x)] ,$$

$$F_2^n(x) = \frac{4}{9}x [u_n(x) + \bar{u}_n(x)] + \frac{1}{9}x [d_n(x) + \bar{d}_n(x) + s_n(x) + \bar{s}_n(x)] .$$

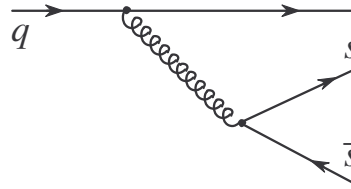
Dodatkowo, zakładając symetrię izospinową, przyjmujemy:

$$u_p = d_n = u, \quad d_p = u_n = d, \quad s_p = s_n = s.$$

Własności rozkładów kwarkowych

Ponieważ neutron i proton nie mają dziwności kwarki dziwne mogą pojawić się jedynie w wyniku produkcji radiacyjnej (Rysunek 1). Prowadzi to do równania:

$$\int dx (s(x) - \bar{s}(x)) = 0.$$



Rysunek 1: Produkcja pary $s\bar{s}$ w nukleonie.

Rozkłady kwarkowe spełniają szereg więzów. Całkowity ładunek protonu i neutronu ma postać:

$$q_p = \int dx \left[\frac{2}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) - \frac{1}{3}(s(x) - \bar{s}(x)) \right] = 1$$

$$q_n = \int dx \left[\frac{2}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) - \frac{1}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{3}(s(x) - \bar{s}(x)) \right] = 0$$

$\updownarrow = 0$

Rozwiązania:

$$\int dx(u(x) - \bar{u}(x)) = 2, \quad \int dx(d(x) - \bar{d}(x)) = 1, \quad \int dx(s(x) - \bar{s}(x)) = 0.$$

Kwarki walencyjne i kwarki morza:

$$u = u_v + q_s, \quad d = d_v + q_s, \quad \bar{u} = \bar{d} = \bar{s} = s = q_s$$

co daje

$$\int dx u_v(x) = 2, \quad \int dx d_v(x) = 1$$

Rozkłady kwarków są znormalizowane do ich liczby.

Pęd protonu:

$$\int dx x(u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) = 1 - \varepsilon.$$

Okazuje się, że $\varepsilon \sim 45\%$. Co niesie resztę pędu? Gluony.

Reguła Gottfrieda

$$2F_1^p(x) = \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)],$$

$$2F_1^n(x) = \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)].$$

Policzmy różnicę

$$\begin{aligned} S_G &= \int dx (F_1^p(x) - F_1^n(x)) = \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{1}{3} [u(x) + \bar{u}(x)] - \frac{1}{3} [d(x) + \bar{d}(x)] \right) \\ &= \frac{1}{6} \int dx [u_v(x) - d_v(x)] + \frac{2}{6} \int dx [q_s(x) - \bar{q}_s(x)] = \frac{1}{6} \simeq 0.17. \end{aligned}$$

Eksperyment: 0.13.

Uniwersalność rozkładów partonowych.