Wstęp do fizyki cząstek

zestaw 5

14.6.2018. czwartek, godz. 10:15

sala A-2-04

1. Równanie Diraka możemy zapisać w jenostkach naturalnych $c = \hbar = 1$ w formie

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\,\psi = 0,$$

gdzie

$$p^\mu = (p^0 = i\partial_t, \vec{p} = -i\vec{\nabla}),$$

oraz

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Obliczyć antykomutator

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} =?. \tag{2}$$

Sprawdzić, że

$$\left(\gamma^0\right)^\dagger = \gamma^0,\ \left(\gamma^i\right)^\dagger = -\gamma^k.$$

2. Sprawdzić, że macierze

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

też spełniają warunki antykomutacji (2).

3. Transformacja Lorentza

$$x'^\mu = L^\mu_{\ \nu} x^\nu \tag{4}$$

zachowuje długość czterowektora $x^2 = x^\mu x_\mu$. Zakładając, że przy transformacji współrzędnych (4) bispinor Diraka transformuje się w następujący sposób

$$\psi'(x') = S(L)\psi(x)$$

(gdzie S jest macierzą niezależną od współrzędnych) wykazać, że

$$S^{-1}(L)\gamma^\mu S(L) = L^\mu_{\ \nu}\gamma^\nu. \tag{5}$$

4. Przy pomocy macierzy γ Diraka można zdefiniować macierz

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{6}$$

Udowodnić własności:

$$\left(\gamma_5\right)^2 = 1,\ \gamma_5^\dagger = \gamma_5,\ \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0.$$

Znaleźć jawną postać γ_5 w reprezentacji (1). Udowodnić, że

$$S^{-1}(L)\gamma_5 S(L) = \det(L)\,\gamma_5.$$

W tym celu użyć innej formy γ_5:

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu,$$

gdzie $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ jest całkowicie antysymetrycznym tensorem, takim że $\varepsilon^{0123} = 1$.

5. Operatory

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$$

są operatorami rzutowymi. Rozbić równanie Diraka

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\,\psi = 0, \tag{7}$$

na dwa równania na funkcje

$$\psi_\pm = P_\pm \psi.$$

Skorzystać jedynie z własności komutacji γ_5 i γ^μ.

6. Znaleźć jawną postać γ_5 oraz $P_\pm$ w reprezentacji macierzy Diraka (1) i (3).

7. Równanie Diraka w zenętrznym polu elektromagnetycznym ma postać

$$\{i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m\}\,\psi = 0,$$

gdzie $e > 0$ jestladunkiem eletrycznym. Oznaczmy przez ψ^c pole *sprzężone ładunkowo*, czyli takie, które opisuje cząstkę o przeciwnym ładunku:

$$\{i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\}\,\psi^c = 0.$$

Operacja sprzęzenia ładunkowego przeprowadza $\psi \to \psi^c$. Wykazać, że

$$\psi^c = C\psi^*,$$

Gdzie C jest pewną macierzą. Wykazać, że macierz C spełnia warunek:

$$\gamma^\mu = -C(\gamma^\mu)^* C. \tag{8}$$

Korzystając z jawnej postaci macierzy γ^μ z poprzedniego zadania wykazać, że

$$C = e^{i\phi}\gamma^2.$$