Wstęp do fizyki cząstek

zestaw 1

6.3.2018. wtorek, godz. 10:10

sala A-1-08

1. Wektory *kontrawariantne* x^μ oraz *kowariantne* x_μ transformują się w następujący sposób:
$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad x'_\mu = x_\nu \left(L^{-1}\right)^\nu{}_\mu$$
Pokazać, że
$$x'_\mu x'^\mu = x_\mu x^\mu.$$
Wykazać, że operatory
$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right), \qquad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)$$
transformują się odpowiednio jak wektory *kowariantne* i *kontrawariantne*.

2. Generatory transformacji Lorentza mają następującą postać macierzową:
$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \; J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Wykazać bezpośrednim rachunkiem, że
$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k, \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} K_k, \\ [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk} J_k. \end{aligned}$$
Korzystając z tych relacji wyprowadzić relacje komutacji dla operatorów
$$J_i^\pm = \frac{1}{2}\left(J_i \pm i K_i\right).$$

3. Dana jest algebra operatorów T_m, gdzie $m, n, l = 1, 2, \ldots N^2 - 1$
$$[T_m, T_n] = i f_{mnl} T_l, \tag{1}$$
gdzie stałe f_{mnl} są rzeczywistymi tensorami całkowicie antysymetrycznymi. Wykazać, korzystając z tożsamości Jacobiego, że macierze
$$\left(\tilde{T}_m\right)_{nl} = -i f_{mnl}$$
spełaniają regułę komutacji (1).

4. Pokazać, że jeżeli spełniona jest relacja (1), to macierze

$$T_l' = -T_l^*$$

także spełnają (1). Dla grupy SU(2) ($T_l = \tau_l/2$, gdzie τ_l to macierze Pauliego, a $f_{mnl} = \varepsilon_{mnl}$) istnieje unitarna transformcja podobieństwa

$$U\tau_m U^\dagger = -\tau_m^*. \tag{2}$$

Znaleźć U.

WSKAZÓWKA: Rozpisać jawnie równanie (2) dla $m = 1, 2$ i 3.

5. Równanie Diraka ma postać

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\psi,$$

gdzie

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix},\ \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nie jest to jedyna możliwa reprezentacja dla macierzy α_i i β. Sprawdzić, że macierze

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{bmatrix},\ \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

spełniają warunki wymagane, aby równanie Diraka podniesione do kwadratu zamieniało się w równanie Kleina-Gordona. Znaleźć transformację U, która łączy te reprezentacje:

$$\alpha_i = U\tilde{\alpha}_i U^\dagger,\ \beta = U\tilde{\beta}U^\dagger.$$

Zapisać w sposób jawny równanie Diraka przy pomocy macierzy $\tilde{\alpha}_i$ i $\tilde{\beta}$ i pokazać, że dla $m = 0$ równanie Diraka rozsprzęga się na dwa niezależne równania (zwane równaniami Weyla).

http://th-www.if.uj.edu.pl/~michal/