1 Symetria cechownia

Wszystkie znane nam kwantowe teorie oddziaływań fundamentalnych (elektromagnetycznych, słabych i silnych) są oparte ma lokalnej symetrii cechowania. W tym rozdziale pokrótce omówimy główne zasady takich teorii.

W mechanice kwantowej funkcja falowa jest dana z dokładnością co do fazy. Funkcja ψ'

$$\psi(\vec{r},t) \to \psi'(\vec{r},t) = e^{i\alpha}\psi(\vec{r},t) \tag{1}$$

opisuje ten sam stan kwantowy co funkcja ψ. Wiąże się to z tym, że faza kasuje się w wyrażeniu na gęstość prawdopodobieństwa. W rzeczywistości nie tylko gęstość prawdopodobieństwa, ale także elementy macierzowe operatorów, w szczególności operatora energii, czy hamiltonianu

$$\langle\psi'|\,\mathcal{O}\,|\psi'\rangle = \langle\psi|\,e^{-i\alpha}\mathcal{O}e^{i\alpha}\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,\mathcal{O}\,|\psi\rangle \tag{2}$$

nie zmieniają się przy takiej transformacji.

Sytuacja zmienia się, jeżeli chcielibśmy rozważyć fazę, która nie jest stała, ale jest funkcją zależną od czasu i położenia

$$\alpha \to \alpha(\vec{r},t) = \alpha(x) \tag{3}$$

gdzie x jest czterowektorem $x = (t,\vec{r})$, gdyż operatory energii $E = i\hbar\,\partial/\partial t$, czy pędu $p_i = -i\hbar\,\partial/\partial x_i$ różniczkują nie tylko funkcję falową, ale i fazę. Czyli

$$\partial_\mu\psi'(x) = \partial_\mu\left(e^{i\alpha(x)}\psi(x)\right) = e^{i\alpha(x)}\left[i\left(\partial_\mu\alpha(x)\right)\psi(x) + \partial_\mu\psi(x)\right] \neq e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x). \tag{4}$$

Aby utrzymać niezmienniczość (2) dokonuje się zmiany defincji operatora pochodnej dodając do niego pewną funkcję wektorową:

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x). \tag{5}$$

Wówczas

$$D'_\mu\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\left[\partial_\mu + igA'_\mu(x) + i\left(\partial_\mu\alpha(x)\right)\right]\psi(x) = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x). \tag{6}$$

Ostatnia równość zachodzi wtedy, gdy

$$gA'_\mu(x) = gA_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x). \tag{7}$$

Funkcja A_μ jest czteropontencjałem opisującym pole elektromagnetyczne. Stała g jest ładunkiem skojarzonym z cząstką opisywaną funkcją falową ψ. Pojawienie się oddziaływania z polem elektromagnetycznym jest konsekwencją żądania niezmienniczości teorii ze względu na symetrię cechowania (gauge symmetry), która polega na równoczesnym przekształceniu funkcji falowej i czteropotencjału:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\;\to\; \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x),\\ A'_\mu(x) &\;=\; A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x).\end{aligned} \tag{8}$$

Ponieważ faza jest elementem grupy U(1), mówimy tu o symetrii U(1).

Wprowadzenie oddziaływanie z polem elektromagnetycznym wymaga oczywiście również wprowadzenia tensora $F_{\mu\nu}$, z którego można wyprowadzić równania Maxwella. W elektrodynamice (teorii abelowej)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{9}$$

(gdzie opuściliśmy zależność potencjałów od x). Jak widać tensor pola jest niezmienniczy względem (8). Równania Maxwella w próżni przyjmują postać

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0. \tag{10}$$

Najprościej rozwiązać je ustalając cechowanie

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \tag{11}$$

(cechowanie Lorentza), gdyż wtedy redukują się one do równań na falę elektromagnetyczną

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = 0, \tag{12}$$

które rozwiązujemy poprzez transformatę Fourier'a:

$$A_\nu(x) = a \int d^4p\, \varepsilon_\nu(p)\, e^{-ip^\mu x_\mu}. \tag{13}$$

Równanie (12) sprowadza się do

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = -a \int d^4p\, \varepsilon_\mu(p)\, e^{-ip^\mu x_\mu} p^2 = 0 \quad \rightarrow \quad p^2 = 0. \tag{14}$$

co oznacza, że foton jest bezmasowy. Łatwo przekonać się, że aby uzyskać relację dyspersji dla cząstki masowej $p^2 = m^2$, równanie (10) powinno mieć postać

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 A_\nu = 0. \tag{15}$$

Jednak człon z masą nie jest niezmienniczy ze względu na transformację (8). Niezmienniczość względem symetrii cechowania wymusza, że foton jest bezmasowy.

W roku 1954 Yang i Mills uogólnili symetrię cechowania U(1) na przypadek grupy SU(2), a w zasadzie na przypadek dowolnej grupy SU(N), gdzie funkcja falowa jest $N-$komponentowym wektorem należącym do reprezentacji fundamentalnej grupy SU(N):

$$\psi(x) \rightarrow \psi_\alpha(x). \tag{16}$$

Aby elementy typu (2) były niezmiennicze przy transformacji (opuszczamy indeksy)

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x), \tag{17}$$

gdzie U jest unitarną macierzą $N \times N$ o wyznaczniku 1 (czyli elementem grupy $\mathrm{SU}(N)$ w reprezentacji fundamentalnej), pochodna kowariantna

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\boldsymbol{A}_\mu(x) \tag{18}$$

gdzie pole $\boldsymbol{A}_\mu(x)$ jest macierzą, musi transformować się w następujący sposób

$$\begin{aligned} D'_\mu &= U(x) D_\mu U^\dagger(x) \\ &= U(x)\left(\partial_\mu + ig\boldsymbol{A}_\mu(x)\right) U^\dagger(x) \\ &= \partial_\mu + igU(x)\boldsymbol{A}_\mu(x)U^\dagger(x) + U(x)\partial_\mu U^\dagger(x). \end{aligned} \tag{19}$$

Zauważmy, że

$$0 = \partial_\mu(U(x)U^\dagger(x)) = \left[\partial_\mu U(x)\right] U^\dagger(x) + U(x)\partial_\mu U^\dagger(x), \tag{20}$$

co oznacza, że

$$U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) = -\left[\partial_\mu U(x)\right] U^\dagger(x). \tag{21}$$

Zatem

$$\partial_\mu + ig\boldsymbol{A}'_\mu(x) = \partial_\mu + igU(x)\boldsymbol{A}_\mu(x)U^\dagger(x) - \left[\partial_\mu U(x)\right] U^\dagger(x), \tag{22}$$

co oznacza, że

$$\boldsymbol{A}'_\mu(x) = U(x)\boldsymbol{A}_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}\left[\partial_\mu U(x)\right] U^\dagger(x). \tag{23}$$

Ponieważ pole $\boldsymbol{A}_\mu$ jest macierzą $N \times N$, można go rozłożyć w bazie generatorów grupy $\mathrm{SU}(N)$:

$$\boldsymbol{A}_\mu(x) = \sum_{n=1}^{N^2-1} T_n\, A^n_\mu(x), \tag{24}$$

gdzie

$$T_n = \frac{1}{2}\tau_n \qquad \text{lub} \qquad T_n = \frac{1}{2}\lambda_n$$

odpowiednio dla grupy SU(2) lub SU(3). Widzimy zatem, że w wyniku żądania niezmienniczości cechowania względem nieabelowej grupy $\mathrm{SU}(N)$ pojawia się $N^2 - 1$ pól wektorowych.

W przypadku nieabelowym musimy tensor pola zdefiniować poprzez pochodne kowariantne

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = D_\mu \boldsymbol{A}_\nu - D_\nu \boldsymbol{A}_\mu. \tag{25}$$

Można pokazać, że

$$\boldsymbol{F}'_{\mu\nu} = U\boldsymbol{F}_{\mu\nu}U^\dagger \tag{26}$$

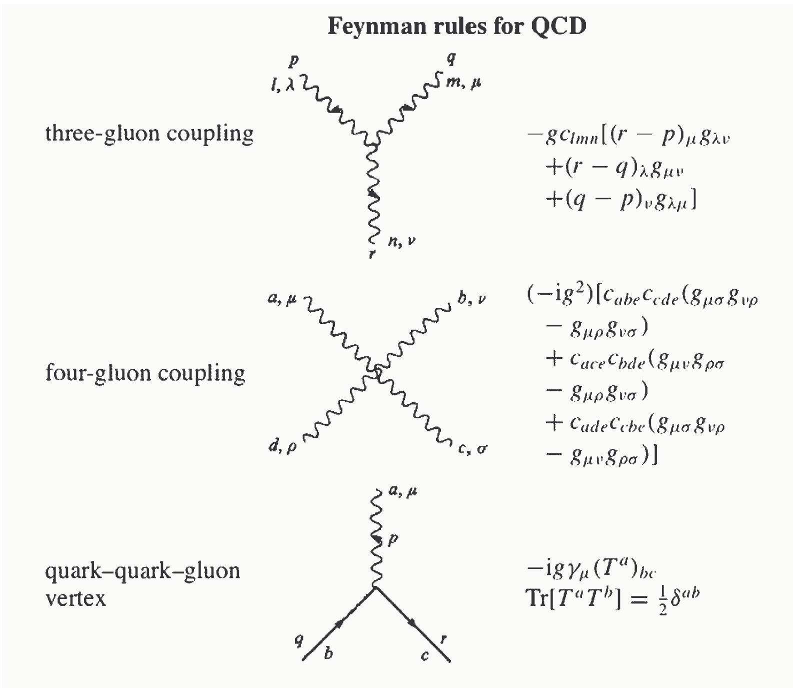
czyli, że tensor pola transformuje się tak, że gwarantuje niezmienniczość elementów macierzowych typu (2).

Zmiana definicji tensora pola powoduje zmiany w odpowiednich równaniach Maxwella nazywanych równaniami Yanga-Millsa. Zauważmy, że tensor pola nieabelowego

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\mu\nu} &= (\partial_\mu + ig\boldsymbol{A}_\mu)\boldsymbol{A}_\nu - (\partial_\nu + ig\boldsymbol{A}_\nu)\boldsymbol{A}_\mu \\ &= \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + ig\,[\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu] \end{aligned} \tag{27}$$

zawiera komutator pól $\boldsymbol{A}_\mu$, co powoduje, że równania Yanga-Millsa są nieliniowe. Ponadto, ponieważ hamiltonian dla pól cechowania jest proporcjonalny do kwadratu $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$, pojawiają się w nim człony będące iloczynem trzech i czterech pól $\boldsymbol{A}_\mu$. Oznacza to, że w przypadku nieabelowym pola cechowania samoddziaływują (fotony nie oddziaływują ze sobą bezpośrednio). Tłumaczy się to, w języku diagramów Feynmana, na sprzężenia trzech i czterech linii odpowiadających polom cechowania. Na koniec podkreślmy, że argument, że niezmienniczość względem symetrii cechowania implikuje bezmasowość pól wektorowych, obowiązuje też w przypadku teorii nieabelowej.

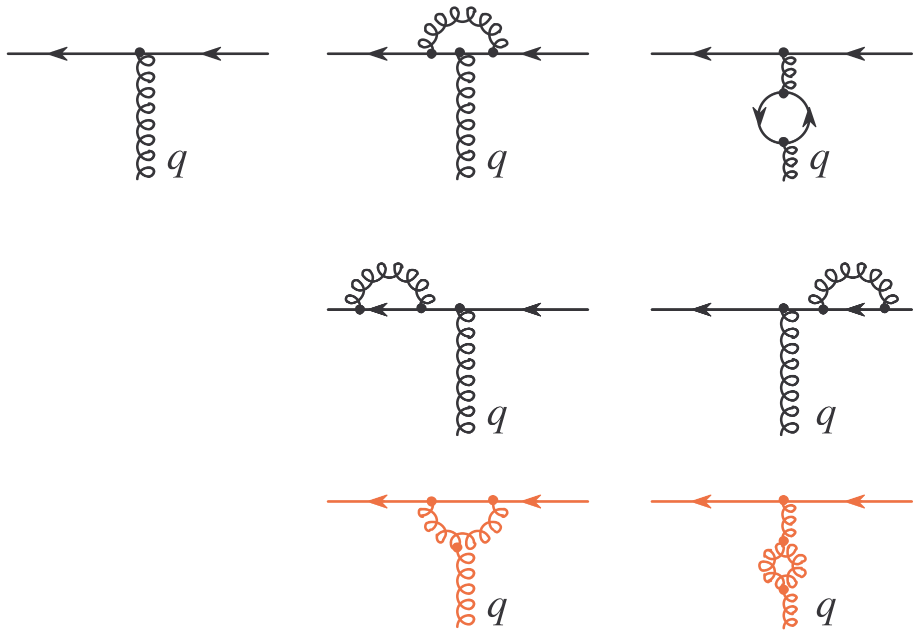
Są dwie podstawowe różnice, jeżeli chodzi o obliczanie amplitud rozpraszania między QED a teoriami Yanga-Millsa. Po pierwsze są nowe sprzęzenia, o których już wspomnieliśmy. Mają one podstawowe znaczenie, jeżeli chodzi o zachowanie się obu typów teorii w ultrafiolecie (dla wysokich energii). Po drugie, diagramy Feynmana faktoryzują się na część – nazwijmy to – kinematyczną pomnożoną przez czynnik związany z grupą cechowania, dla grupy SU(3) nazywa się go czynnikiem kolorowym. Kilka przykładów obliczania czynników kolorowych podaliśmy przy okazji omawiania grupy SU(3) na początku wykładu.



Rysunek 1: Reguły Feynmana dla teorii Yanga-Millsa. Stałe c_{abc} są stałymi struktury grupy, które oznaczliśmy jako f_{abc}.

2 Renormalizacja

Jedną z podstawowych trudności w teorii pola jest pojawianie się rozbieżności w tzw. diagramach pętlowych. Przykład diagramów pętlowych modyfikujących podstawowy wierzchołek teorii: fermion-bozon wektorowy, pokazany jest na rysunku 2. Kolorem czarnym narysowane są diagramy wspólne dla QED i teorii nieabelowej, kolorem czerwonym dodatkowe diagramy, które istnieją tylko w teorii nieabelowej. We wszystkich tych diagramach pojawiają się pętle. Nawet dla ustalonych pędów zewnętrznych (diagramy pokazane na rysunku 2 mogą być częścią większego diagramu i wtedy może występować całka po pędach zewnętrznych) pędy wewnątrz pętli nie są ustalone przez zasady zachowania i trzeba wykonać całkę po „wolnym" czteropędzie d^4k. Rozbieżności, o których tu mówimy, pochodzą z górnej granicy całkowania i mają charakter logarytmiczny. Poniżej pokażemy schematycznie, jak sobie z takimi rozbieżnościami poradzić, dlatego interesować nas będzie postać całek dla bardzo dużych k, stąd pojawiająca się w tych całkach rozbieżność z dolnej granicy całkowania jest pozorna, gdyż w tej granicy wyrażenie podcałkowe tak na prawdę nie ma osobliwości. Ponadto przyjmiemy, że $q^2 \neq 0$, natomiast kwadraty czterpędów fermionów są równe zero.



Rysunek 2: Poprawki do wierzchołka fermion-bozon wektorowy. Kolorem czarnym narysowane są diagramy wspólne dla QED i teorii nieabelowej, kolorem czerwonym dodatkowe diagramy, które istnieją tylko w teorii nieabelowej.

Najpierw trzeba dokonać regularyzacji.

- Obcięcie czterowymiarowe ($\Lambda \to \infty$)

$$\underbrace{g^2 \int^{\infty} \frac{dk}{k}}_{\text{skończone}} \to g_\Lambda^2 \int^{\Lambda} \frac{dk}{k} = g_\Lambda^2 \ln \Lambda + \text{skończone} \tag{28}$$

- Regularyzacja wymiarowa ($\varepsilon \to 0$)

$$\underbrace{g^2 \int^{\infty} \frac{dk}{k}}_{\text{skończone}} \to g_\varepsilon^2 \int^{\infty} k^{-\varepsilon} \frac{dk}{k} = g_\varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon} \; k^{-\varepsilon}\Big|_{\text{skończone}}^{\infty} \to -g_\varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon} \times \text{skończone} \tag{29}$$

Renormalizacja polega na *wepchnięciu* nieskończoności do

- stałej sprzężenia,
- mas cząstek,
- funkcji falowych.

Jeśli tylko skończona liczba typów rozbieżności się pojawia, która się daje usunąć w ten sposób, to mówimy, że teoria jest *renormalizowalna*.

Nawet jeżeli w teorii nie było stałej wymiarowej (wszystkie masy kładziemy zero, stała sprzężenia jest bezwymiarowa), to renormalizacja wprowadza zależność stałej sprzężenia od pewnej stałej wymiarowej.

Ponieważ w opisywanym problemie mamy tylko jedną zmienną wymiarową $Q^2 = -q^2$, zregularyzowna całka (28) może zawierać jedynie logarytm stosunku Q^2/Λ^2:

$$\text{(suma diagramów z Rys. 2)} = g_\Lambda \left(1 - g_\Lambda^2 \left(a\,\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \ldots\right) + \ldots\right)$$

Renormalizacja polega na wciągnięciu nieskończoności do g_Λ:

$$g_\Lambda = g - ag^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} + \ldots$$

Tu g jest liczbą

$$\begin{aligned}
\text{(suma)} &= \left(g - ag^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} + \ldots\right)\left(1 - \left(g - ag^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} + \ldots\right)^2 \left(a\,\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \ldots\right) + \ldots\right) \\
&= g - ag^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} - g^3 a\,\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \ldots \\
&= g - ag^3 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} + \ldots = g(Q^2).
\end{aligned}$$

Lepiej zapisać to dla stałej g^2:

$$g^2(Q^2) = g^2 - 2ag^4 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} + \ldots = \frac{g^2}{1 + 2ag^2 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}}$$

Co to jest g^2?

$$g^2 = g^2(Q_0^2)$$

Spróbujemy nieznaną wartość g w arbitralnym (acz ustalonym) punkcie Q_0^2 zastąpić przez nową stałą wymiarową, którą oznaczymy Λ_{QCD}. Najpierw przepiszmy

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} = \frac{1}{g^2(Q_0^2)}\left(1 + 2ag^2(Q_0^2) \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}\right) = \frac{1}{g^2(Q_0^2)} + 2a \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}$$

co daje

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} - 2a \ln Q^2 = \frac{1}{g^2(Q_0^2)} - 2a \ln Q_0^2 \overset{\text{ozn.}}{=} -2a \ln \Lambda_{\mathrm{QCD}}^2$$

co daje

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} = 2a \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2} \to g^2(Q^2) = \frac{1}{2a \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2}}$$

Jest to wzór asymptotyczny. Jego sensowność zależy od znaku a. Jeżeli a jest ujemne to wzór

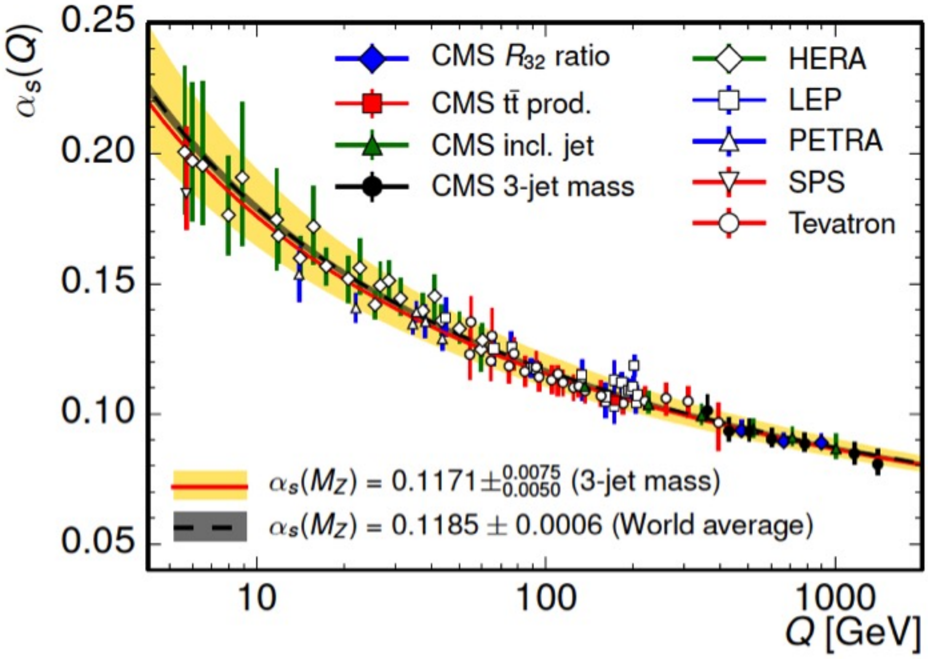
$$g^2(Q^2) = \frac{g^2}{1 + 2ag^2 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}}$$

ma osobliwość (biegun Landaua w elektrodynamice), jeżeli a jest dodatnie, $g^2(Q^2)$ znika dla dużych Q^2 (asymptotyczna swoboda). Używając (standardowa notacja):

$$\alpha(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2_{\mathrm{QCD}}}}, \quad \beta_0 = \frac{11}{3}C_A - \frac{2}{3}n_f$$

gdzie

$$n_f \rightarrow \text{liczba kwarków w diagramie pętlowym}$$
$$C_A \rightarrow \text{operator Casimira dla grupy SU}(N_c)$$



Rysunek 3: Biegnąca stała sprzężenia (CMS-SMP-12-027).

3 Oddziaływania silne, chromodynamika kwantowa (QCD)

Okazuje się, że oddziaływania silne oparte są na teorii Yanga-Millsa dla grupy SU(3). Podamy teraz argumenty doświadczalne za wyborem tej właśnie grupy. Niezmienniki grupy SU(3):

$$\delta_{ab}, \qquad \varepsilon_{abc}$$

albowiem:

$$U^\dagger U = 1 \rightarrow U^\dagger_{ab}\delta_{bc}U_{cd} = \delta_{ad}$$

oraz

$$\varepsilon_{abc} U_{aa'} U_{bb'} U_{cc'} = \varepsilon_{a'b'c'} \det U = \varepsilon_{a'b'c'}$$

Jest to analogon związku dla SU(2)

$$U^T \varepsilon U = \varepsilon \to U^T_{a'a} \varepsilon_{ab} U_{bb'} = \varepsilon_{ab} U_{aa'} U_{bb'} = \varepsilon_{a'b'}.$$

Zatem singlety kolorowe to stany

$$M_{12} = q_1^\dagger q_2 = \begin{bmatrix} q^*_{r}{}_1, q^*_{g}{}_1, q^*_{b}{}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{r}{}_2 \\ q_{g}{}_2 \\ q_{b2} \end{bmatrix} \qquad \text{mezony}$$

$$B_{123} = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{abc} q_{a}{}_1 q_{b}{}_2 q_{c}{}_3 \qquad \text{bariony}$$

Gdyby grupą cechowania oddziaływań silnych nyła grupa SU(N), bariony składałyby się z N kwarków.

Naiwny model kwarków: kwarki w uśrednionym potencjale siedzą na poziomie podstawowym (jak elektrony w atomie wodoru) – czyli w fali s. Jak zatem możliwe jest istnienie rezonansu Δ który składa się z trzech kwarków u, każdy ze spinem $+1/2$? Funkcja falowa

$$\Delta = u^\uparrow(x) u^\uparrow(y) u^\uparrow(z)$$

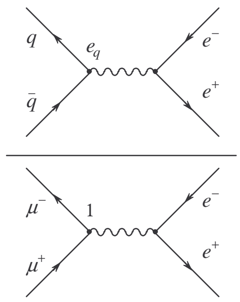
$$\begin{aligned} \text{przestrzenna} &\to \text{symetryczna} \\ \text{spinowa} &\to \text{symetryczna} \\ \text{kolorowa} &\to \text{antysymetryczna} \end{aligned}$$

Dodanie nowej liczby kwantowej związanej z grupą SU(3), tzw. *koloru* „ratuje” zakaz Pauliego.

Inny argument za $N = 3$ pochodzi ze zbadania stosunku:

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \to \text{hadrons}}}{\sigma_{e^+e^- \to \mu^+\mu^-}}$$

który poza rezonansami przyjmuje wartość stałą.



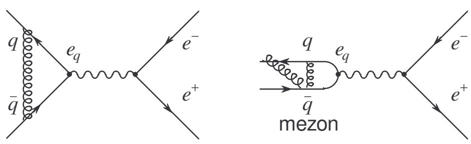
Rysunek 4: Stosunek amplitud na produkcję hadronów do muonów w zderzniach e^+e^-. Czas płynie w lewo.

Dla energii poniżej progu na charm ($E < 3$ GeV) i.t.d.:

$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

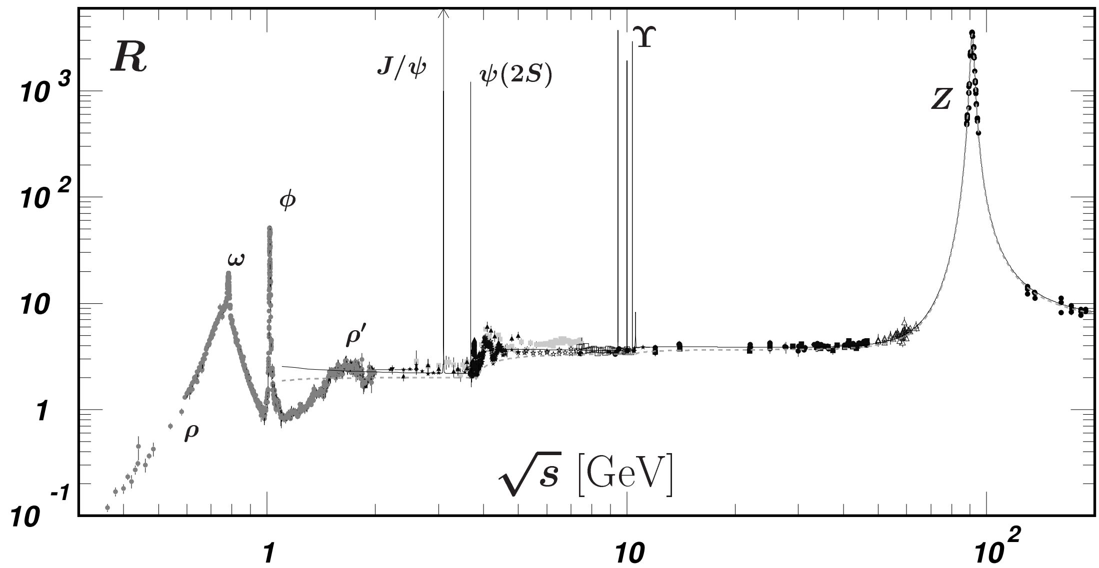
$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 + e_c^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 + e_c^2 + e_b^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}$$



Rysunek 5: Poprawki perturbacyjne i nieperturbacyjne do produkcji hadronów. Czas płynie w lewo.

Poprawki perturbacyjne – małe, nieperturbacyjne – duże, ale waskie.

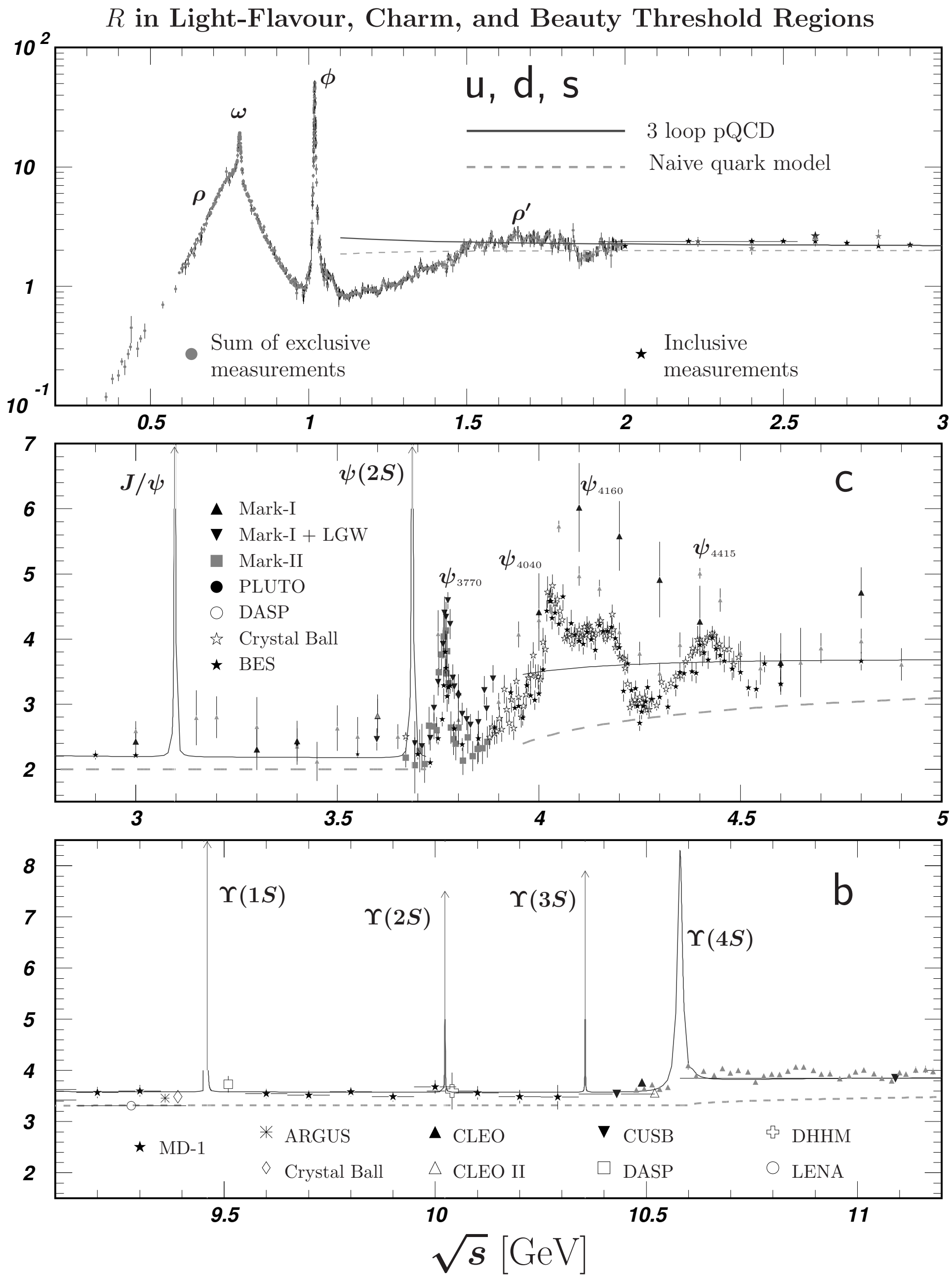


Rysunek 6: Wykres stosunku R w funkcji energii. Linia przerywana – przewidywania modelu kwarków bez uwzględnienia koloru. Linia ciągła – przewidywanie QCD.

$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 = \frac{2}{3} + e_c^2 = \frac{10}{9} + e_b^2 = \frac{11}{9}$$

$$R = 3\left(e_d^2 + e_u^2 + e_s^2\right) = 2 + 3e_c^2 = \frac{10}{3} + 3e_b^2 = \frac{11}{3}$$

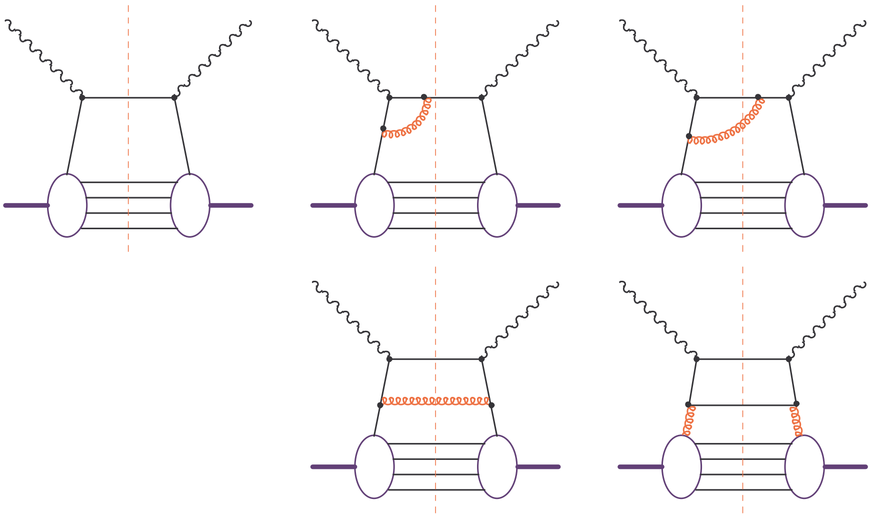
Uwzględnienie koloru $N_c = 3$ daje zgodnosc z doswiadczeniem.



Rysunek 7: Rysunek 6 w powiększeniu.

4 Ewolucja rozkładów partonowych

Poprawki radjacyjne:



Rysunek 8: Kwadrat amplitudy DIS w przybliżeniu Borna i z poprawkami radiacyjnymi zaznaczonymi na czerwono.

Ostatecznie mamy zespół równań (Dokshitzera–Gribova-Lipatova) Altarelliego-Parisiego, który sumuje emisje kolinearne:

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} q_i(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[P_{qq} \otimes q_i(Q^2) + P_{qG} \otimes G(Q^2) \right]$$

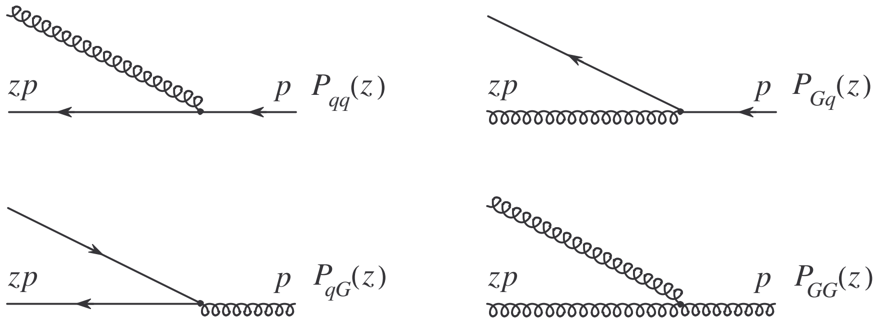
$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} G(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[P_{Gq} \otimes \sum_i q_i(Q^2) + P_{GG} \otimes G(Q^2) \right]$$

(argument $\alpha_s(Q^2)$ jest Q^2). Tu i numeruje rózne flavory: up, down, strange i antykwarki.

W równaniu uzyliśmy konwolucję:

$$\begin{aligned} P_{qq} \otimes q &= \int_0^1 dz \int_0^1 dy \delta(zy - x) P_{qq}(z) q(y) \\ &= \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) q(y) = \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) q\left(\frac{x}{z}\right) \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwa Altarelli-Parisi



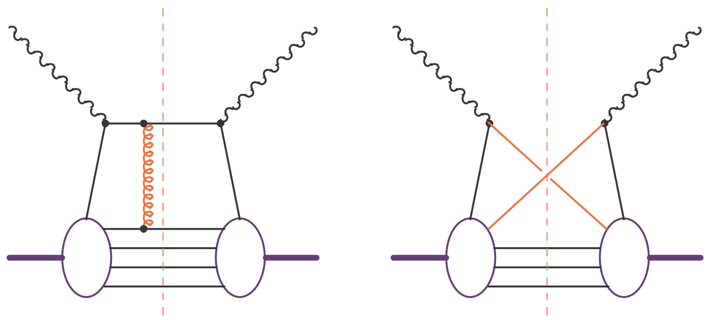
Rysunek 9: Graficzna reprezentacja prawdopodobieństw Altarelliego-Parisiego. Czas płynie w lewo.

Podsumowując

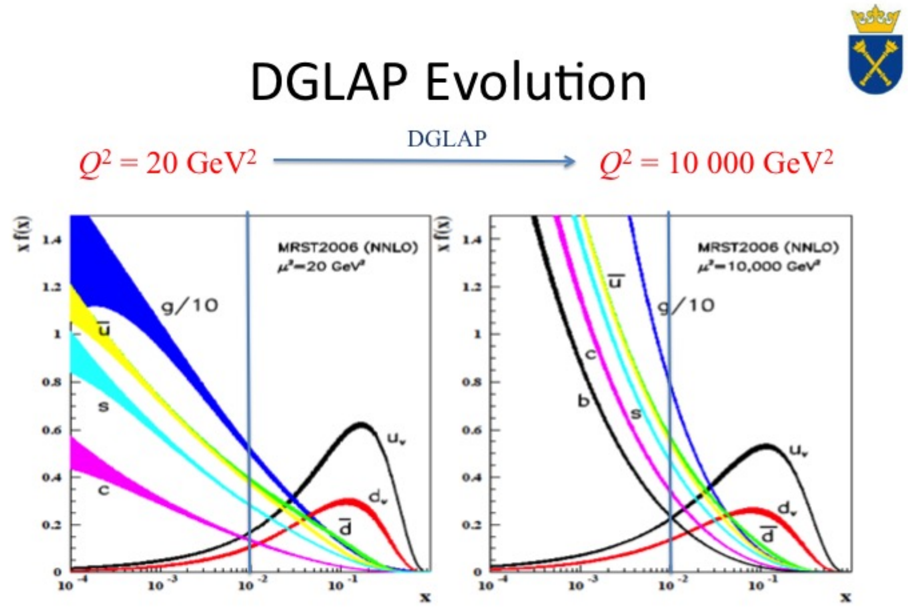
$$P_{qq}(z) = C_F \left(\frac{1+z^2}{1-z}\right)_+, \quad P_{Gq}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad P_{qG}(z) = \frac{1}{2}\left[z^2 + (1-z)^2\right]$$

$$P_{GG}(z) = 2C_A \left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{11}{3}C_A - \frac{2}{3}n_f\right)\delta(1-z)$$

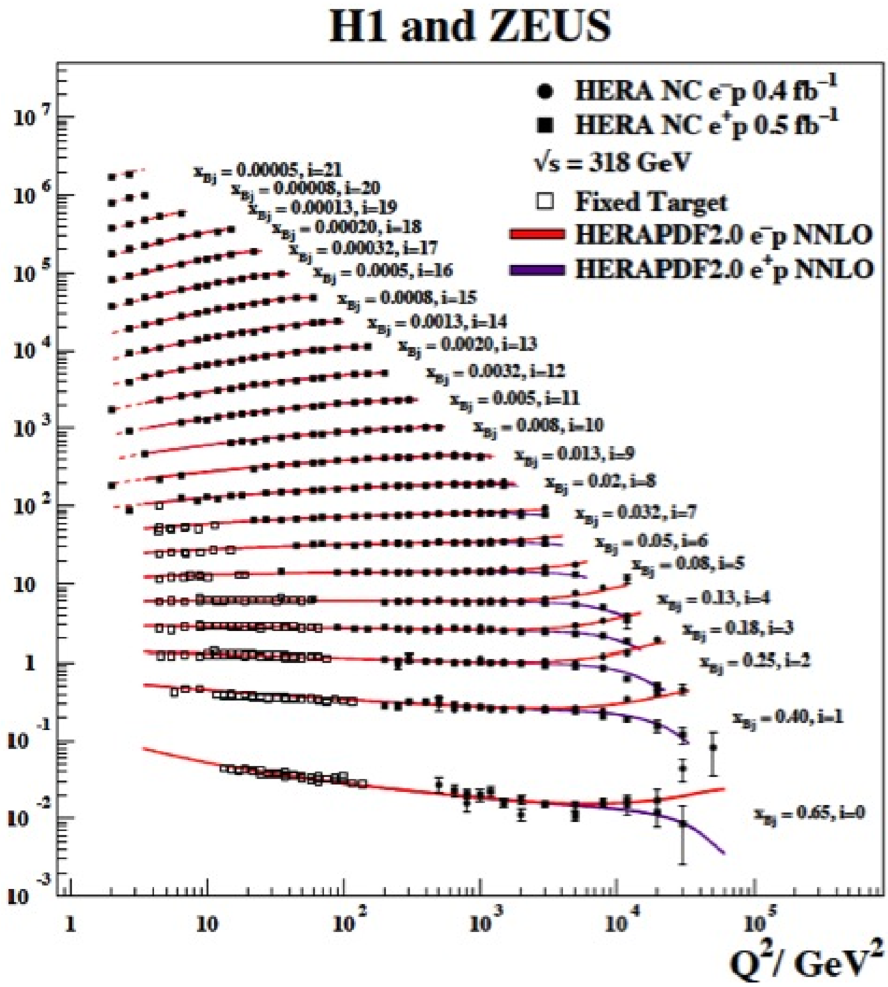
Poprawki których nie bierzemy pod uwagę pokazano na rysunku 10.



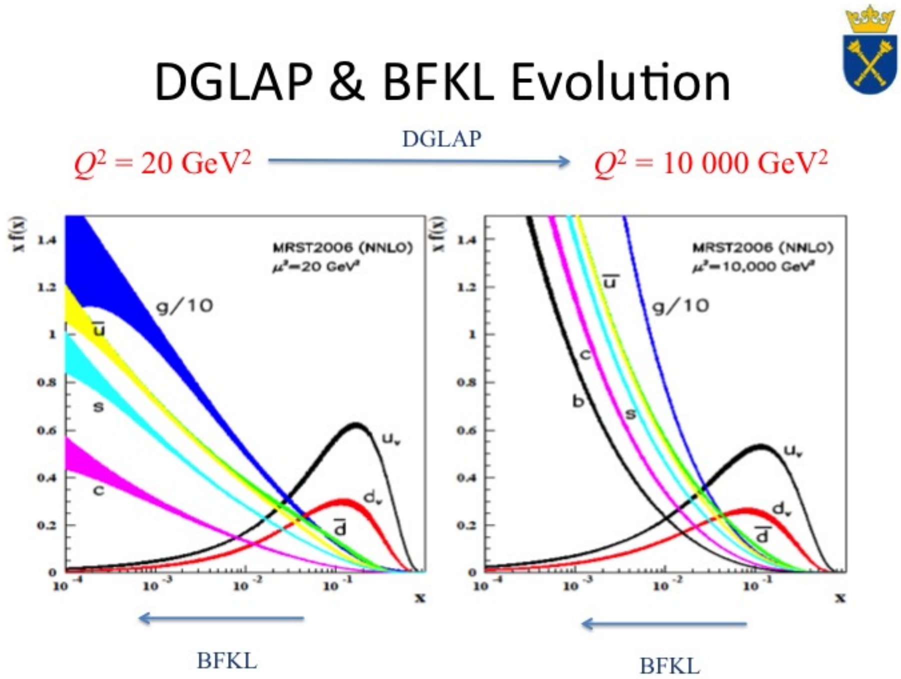
Rysunek 10: Poprawki nie uwzględnione w równaniach DGLAP.



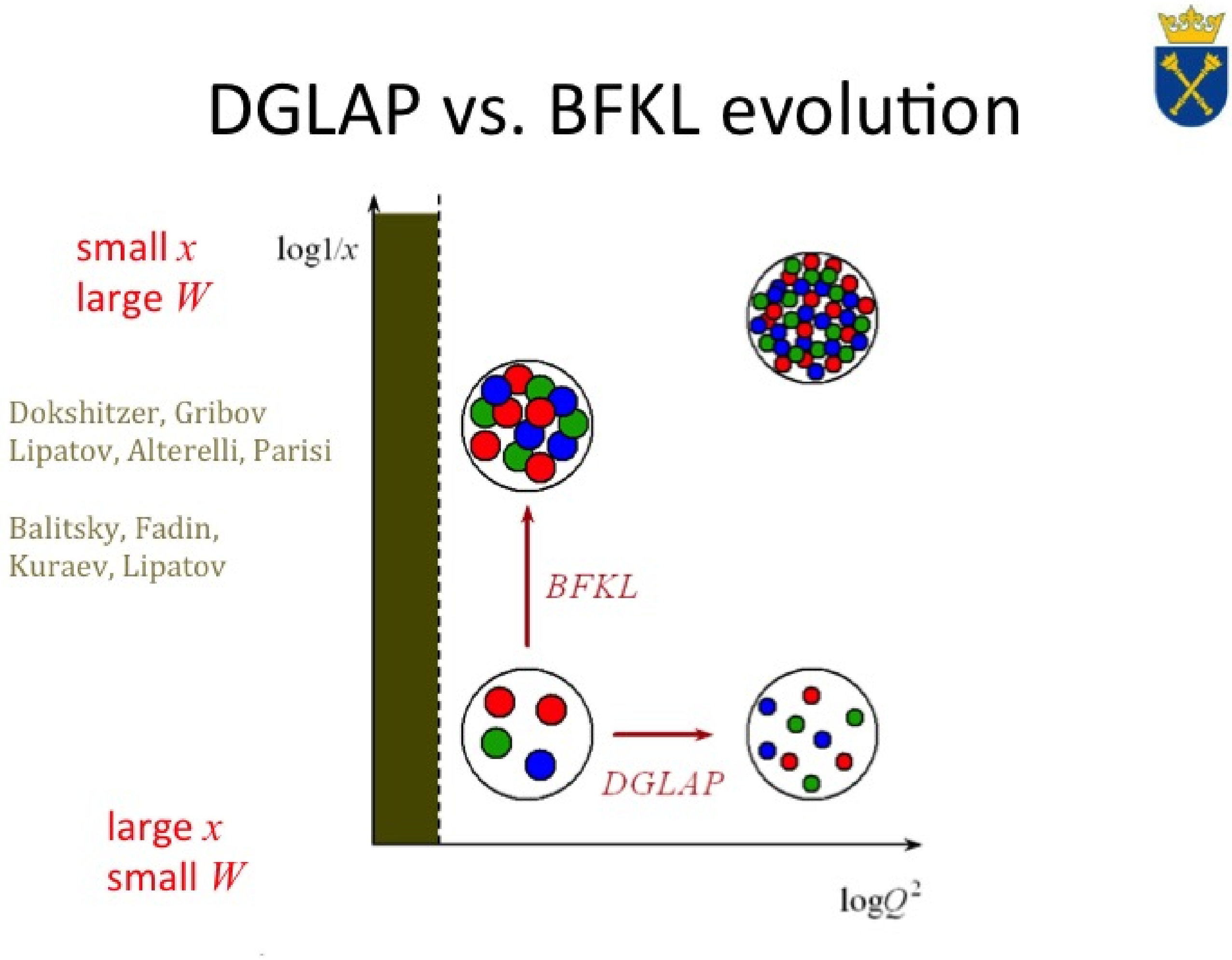
Rysunek 11: Rozkłady partonów i ewolucja DGLAP.



Rysunek 12: Dane z akceleratora HERA



Rysunek 13: Rozkłady partonów i ewolucja DGLAP oraz BFKL.



Rysunek 14: Przestrzeń fazowa ewolucji DGLAP i BFKL.