1 Rozpraszanie

1.1 Obraz oddziaływania

W obrazie Schrödingera stany ewoluują, operatory nie.

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 \\ i\partial_t \left|\alpha(t)\right\rangle^S &= H \left|\alpha(t)\right\rangle^S \end{aligned}$$

Definiujemy operatory w obrazie oddziaływania (interakcji, Tomonagi):

$$\begin{aligned} O^I(t) &= e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t},\ H_0^I = H_0^S = H_0 \\ \left|\alpha(t)\right\rangle^I &= e^{iH_0^S} \left|\alpha(t)\right\rangle^S . \end{aligned}$$

Równanie Schrödingera:

$$\begin{aligned} i\partial_t \left|\alpha(t)\right\rangle^I &= -H_0^S e^{iH_0^S} \left|\alpha(t)\right\rangle^S + e^{iH_0^S} i\partial_t \left|\alpha(t)\right\rangle^S \\ &= -H_0^S \left|\alpha(t)\right\rangle^I + e^{iH_0^S} H \underbrace{e^{-iH_0^S t} e^{iH_0^S}}_{=1} \left|\alpha(t)\right\rangle^S \\ &= \left(-H_0^I + H^I\right) \left|\alpha(t)\right\rangle^I = H_1^I \left|\alpha(t)\right\rangle^I . \end{aligned}$$

Równanie na operatory:

$$\begin{aligned} i\partial_t O^I(t) &= i\partial_t \left(e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}\right) = -H_0^S O^I(t) + O^I(t) H_0^S \\ &= \left[O^I(t), H_0^I\right] \end{aligned}$$

1.2 Operator ewolucji

$$\begin{aligned} \left|\alpha(t)\right\rangle^I &= U^I(t, t_0) \left|\alpha(t_0)\right\rangle^I \\ i\partial_t U^I(t, t_0) &= H_1^I(t) U^I(t, t_0). \end{aligned}$$

Warunek początkowy

$$U^I(t_0, t_0) = 1.$$

Ponieważ

$$\left[H_1^I(t), H_1^I(t')\right] \neq 0$$

rozwiązanie nie jest zwykłą eksponentą. Równanie różniczkowe przepisujemy w postaci całkowej

$$U^I(t, t_0) = \mathbf{1} + (-i) \int\limits_{t_0}^{t} H_1^I(t') U^I(t', t_0) dt'.$$

Rzeczywiście

$$i\partial_t U^I(t,t_0) = (-i)i\partial_t \int\limits_{t_0}^{t} H_1^I(t')U^I(t',t_0)dt' = H_1^I(t)U^I(t,t_0).$$

Równanie całkowe można rozwiązać iteracyjnie (rachunek zaburzeń):

$$U^I(t,t_0) = \mathbf{1} + (-i)\int\limits_{t_0}^{t} dt' H_1^I(t') + (-i)^2 \int\limits_{t_0}^{t} dt' \int\limits_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t')H_1^I(t'') + \ldots$$

Wprowadźmy uporządkowanie czasowe

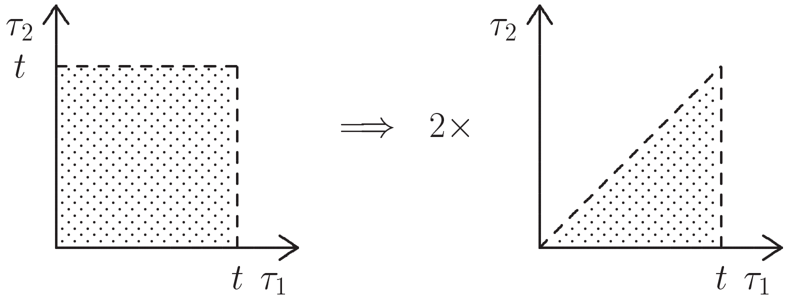
$$T(H_1^I(t_1)H_1^I(t_2)\ldots H_1^I(t_n)) = H_1^I(t_{i_1})H_1^I(t_{i_2})\ldots H_1^I(t_{i_n})$$
$$\text{gdzie: } t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \ldots \geq t_{i_n}$$

Wówczas

$$\int\limits_{t_0}^{t} dt' \int\limits_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t')H_1^I(t'') = \frac{1}{2!}\int\limits_{t_0}^{t} dt' \int\limits_{t_0}^{t} dt'' T(H_1^I(t')H_1^I(t'')).$$

Sprawdźmy:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2!}\int\limits_{t_0}^{t} dt' \int\limits_{t_0}^{t} dt'' T(H_1^I(t')H_1^I(t'')) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int\limits_{t_0}^{t} dt' \int\limits_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t')H_1^I(t'') + \int\limits_{t_0}^{t} dt' \int\limits_{t'}^{t} dt'' H_1^I(t'')H_1^I(t')\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int\limits_{t_0}^{t} dt' \int\limits_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t')H_1^I(t'') + \int\limits_{t_0}^{t} dt'' \int\limits_{t_0}^{t''} dt' H_1^I(t'')H_1^I(t')\right) \\
&= \int\limits_{t_0}^{t} dt' \int\limits_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t')H_1^I(t'')
\end{aligned}$$


τ_2
t
t
τ_1
$\Longrightarrow$
$2\times$
τ_2
t
τ_1

To się uogólnia na wyższe potegi. Ostatecznie mamy

$$U^I(t,t_0) = Te^{-i\int\limits_{t_0}^{t} dt' H_1^I(t')} = Te^{-i\int\limits_{t_0}^{t} d^4x' \mathcal{H}_1^I(x')}$$

gdzie $\mathcal{H}_1^I(x')$ jest gętością hamiltonianu oddziaływania w obrazie interakcji.

Od tej pory opuszczamy wskaźnik "I".

1.3 Macierz S

Macierz rozpraszania (scattering matrix). W dalekiej przeszłosci przygotowujemy swobodny stan $|i\rangle$ (od "initial"), który w czasie ewolucji do chwili t zamienił się w stan ψ:

$$\lim_{t\to-\infty} |\psi(t)\rangle = |i\rangle\,.$$

Pytamy jaka jest amplituda prawdopodobieństwa, że w dalekiej przyszłości otrzymamy stan $|f\rangle$ (od "final"):

$$S_{fi} = \lim_{t\to\infty} \langle f\, |\psi(t)\rangle = \lim_{t_2\to\infty} \lim_{t_1\to-\infty} \langle f|\, U(t_2,t_1)\, |i\rangle \overset{\text{df}}{=} \langle f|\, S\, |i\rangle$$

lub

$$S = U(\infty,-\infty).$$

Ponieważ ewolucja zachowuje normę stanu

$$|\alpha(t)\rangle = U(t,t_0)\, |\alpha(t_0)\rangle$$
$$\langle\alpha(t)\, |\alpha(t)\rangle = \langle\alpha(t_0)|\, \underbrace{U^\dagger(t,t_0)U(t,t_0)}_{=1}\, |\alpha(t_0)\rangle = \langle\alpha(t_0)\, |\alpha(t_0)\rangle$$

operator U jest unitarny, więc S jest też unitarny. Formalnie

$$S = Te^{-i\int d^4x' \mathcal{H}_1^I(x')}.$$