

# 1 Grupa SU(3) model kwarków

## 1.1 Klasyfikacja mezonów

W 1964 roku Murray Gell-Mann i George Zweig niezależnie zaproponowali schemat klasyfikacji znanych wówczas cząstek (ciągle jeszcze nazywanych elementarnymi) przy pomocy składników, które Gell-Mann nazwał kwarkami a Zweig asami. Początkowo uważano, że jest to tylko trick matematyczny i teoriogrupowy i że kwarki nie są dynamicznymi cząstkami, z których zbudowane są cząstki, które obserwujemy. Dziś wiemy, że są to prawdziwe cząstki, a za tworzenie stanów związanych odpowiedzialne są oddziaływania silne opisywane przez chromodynamikę kwantową. Znane nam cząstki silnie oddziałujące to mezony i bariony. W roku 1964 znano już stosunkowo wiele mezonów pseudoskalarnych (o spinie 0, symetrie, które decydują, że są to pseudoskalarzy omówimy później), mezony wektorowe (spin 1), bariony o spinie 1/2 i o spinie 3/2.

Założmy, że podstawowymi składnikami materii są kwarki  $u$ ,  $d$  i  $s$ , które mają spin 1/2, i ułamkowe ładunki elektryczne

$$e_u = \frac{2}{3}, \quad e_d = e_s = -\frac{1}{3}. \quad (1)$$

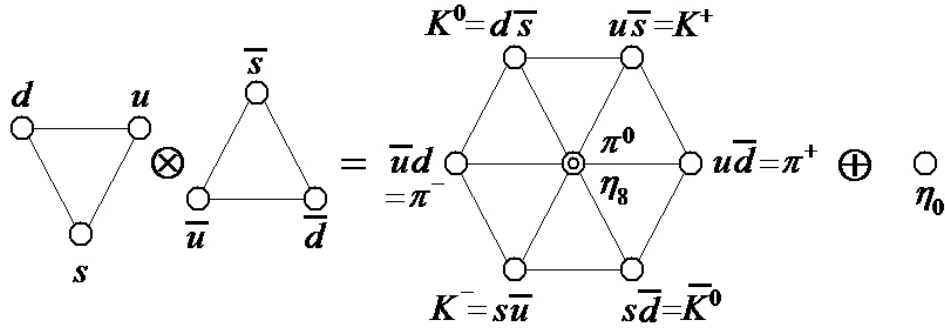
Zakładamy, że w pierwszym przybliżeniu wszystkie kwarki mają tę samą masę  $m$ . Założenie to nie jest prawdziwe, kwarki  $u$  i  $d$  mają masy prawie jednakowe  $m_u \sim m_d \simeq 3 - 5$  MeV (w rzeczywistości kwark  $d$  jest cięższy od kwarku  $u$ , dzięki czemu neutron jest cięższy od protonu), ale kwark  $s$  jest wyraźnie cięższy,  $m_s \sim 95$  MeV. Zakładamy jednak, że efekty tej różnicy możemy potraktować jako zaburzenie. Zatem w pierwszym przybliżeniu o trzech kwarkach  $u$ ,  $d$  i  $s$  zakładamy, że należą do reprezentacji fundamentalnej grupy SU(3) (antykwariki do  $\bar{\mathbf{3}}$ ), której łamanie uwzględnimy perturbacyjnie:

$$\begin{aligned} |u\rangle &= \left| \left(\mathbf{3}\right) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, & |\bar{u}\rangle &= \left| \left(\bar{\mathbf{3}}\right) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ |d\rangle &= \left| \left(\mathbf{3}\right) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, & |\bar{d}\rangle &= \left| \left(\bar{\mathbf{3}}\right) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ |s\rangle &= \left| \left(\mathbf{3}\right) -\frac{2}{3}, 0, 0 \right\rangle, & |\bar{s}\rangle &= \left| \left(\bar{\mathbf{3}}\right) \frac{2}{3}, 0, 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Mezony są zbudowane z jednego kwarku i antykwarku, a więc należą do singletu i oktetu SU(3), co można wyliczyć przy pomocy diagramów Younga:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \quad (3)$$

Ponieważ zarówno  $I_3$  jak i  $Y$  są addytywne, wszystkie stany na obwiedni oktetu są po prostu stanami iloczynowymi, natomiast stany „w środku” są pewnymi kombinacjami liniowymi, które łatwo znaleźć posługując się własnościami izospinowej grupy SU(2) – patrz rysunek 1.



Rysunek 1: Graficzna reprezentacja równania (3).

Stan  $|\pi^0\rangle$  bardzo łatwo skonstruować działając obustronnie na  $|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle$  operatorem  $I_-$ :

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle). \quad (4)$$

Jednakże aby skonstruować stany  $|\eta_8\rangle$  i  $|\eta_0\rangle$  musimy posłużyć się tablicą współczynników C-G.

Współczynniki Clebscha-Gordana dla  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$

						<b>1</b>	<b>8</b>	<b>8</b>
						0	0	0
						0	0	1
						0	0	0
$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 |\eta_8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle + 2|s\bar{s}\rangle), \\
 |\eta_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle).
 \end{aligned} \quad (5)$$

Zauważmy, że stany  $\eta$  zostały tak skonstruowane, że – mimo iż mają te same liczby kwantowe  $Y, I$  oraz  $I_3$  – mają różne własności transformacyjne ze względu na grupę  $SU(3)$ . Ponieważ jednak grupa  $SU(3)$  jest złamana, nic nie stałoby na przeszkodzie, aby stany fizyczne były jakimiś wzajemnie ortogonalnymi kombinacjami liniowymi stanów  $|\eta_8\rangle$  i  $|\eta_0\rangle$ . Okazuje się, że dla mezonów pseudoskalarnych takie mieszanie nie zachodzi i stany fizyczne są (prawie) tożsame ze stanami  $SU(3)$ :

$$|\eta\rangle = |\eta_8\rangle, \quad |\eta'\rangle = |\eta_0\rangle. \quad (6)$$

Do tej pory przyjęliśmy milczące założenie, że spiny kwarku i antykwarku składają się na  $s = 0$ . Jednakże w analogiczny sposób możemy skonstruować mezony wektorowe, które mają spin 1:  $K^*$ ,  $\rho$  (analogon  $\pi$ ),  $\omega_8$  (analogon  $\eta_8$ ) oraz  $\omega_0$  (analogon singletu  $\eta_0$ ). W przeciwieństwie do mezonów pseudoskalarnych stany fizyczne cząstek o liczbach kwantowych  $Y = I = I_3 = 0$  są w tym przypadku mieszaniną stanów  $|\omega_8\rangle$  oraz  $|\omega_0\rangle$ . W rzeczywistości stany fizyczne diagonalizują dziwność:

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle), \\ |\phi\rangle &\simeq |s\bar{s}\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Często przyjmuje się dodatkowy minus dla  $\bar{d}$  i  $\bar{s}$ . Wówczas w singlicie  $|\eta_0\rangle$  mamy same plusy, ale jednocześnie zmieniają się fazy w  $|\eta_8\rangle$  oraz  $|\pi^0\rangle$  (zauważmy, że ogólna faza dla np. mezonów  $K^{0,+}$  nie odgrywa znaczenia).

## 1.2 Rozszczepienia – twierdzenie Ekarta-Wignera

W rzeczywistości kwark dziwny  $s$  jest cięższy od pozostałych kwarków  $u$  i  $d$ . W tym miejscu warto zwrócić uwagę na rozróżnienie między masą „ubraną” (ang. *constituent mass*) i „gołą” (ang. *bare* lub *current*)....

Z łamania symetrii chiralnej wynika, że dla mezonów pseudo-skalarnych

$$M_{\text{mezon}}^2 \sim m_{\text{kwark}}. \quad (8)$$

Zauważmy, że jest to zgodne z równaniem Kleina-Gordona, gdzie człon masowy występuje w kwadracie. Wymiarowa stała proporcjonalności w relacji (8) charakteryzuje własności próżni. W bazie (2) operator łamiący równość mas kwarków  $u$ ,  $d$  i  $s$  ( $m = m_u = m_d$ ) ma postać

$$H' = (m_s - m) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{(m_s - m)}{3} (1 - \sqrt{3}\lambda_8). \quad (9)$$

Ponieważ człon proporcjonalny do macierzy jednostkowej nie łamie symetrii  $SU(3)$ , za jej złamanie odpowiedzialny jest jedynie kawałek z  $\lambda_8$ .

Dla mezonów wektorowych stosujemy relację kwadratową (8) przez analogię z formalizmem teorii pola. Przypomnijmy sobie, że równanie Maxwella dla fotonów (które mają spin 1, a więc są cząstkami wektorowymi) ma postać

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (10)$$

gdzie

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (11)$$

czyli zawiera drugą pochodną potencjału  $A^\mu(x)$ . Najprościej rozwiązać je ustalając cechowanie

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \quad (12)$$

(cechowanie Lorentza), gdyż wtedy redukują się one do równań na falę elektromagnetyczną

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = 0, \quad (13)$$

które rozwiązujemy poprzez transformatę Fourier'a:

$$A_\nu(x) = a \int d^4 p \varepsilon_\nu(p) e^{-ip^\mu x_\mu}. \quad (14)$$

Równanie (13) sprowadza się do

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = -a \int d^4 p \varepsilon_\nu(p) e^{-ip^\mu x_\mu} p^2 = 0 \quad \rightarrow \quad p^2 = 0. \quad (15)$$

co oznacza, że foton jest bezmasowy. Łatwo przekonać się, że aby uzyskać relację dyspersji dla cząstki masowej  $p^2 = m^2$ , równanie (10) powinno mieć postać

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 A_\nu = 0 \quad (16)$$

czyli zawierać człon masowy w kwadracie. Dla fotonu człon ten jest niedozwolony ze względu na symetrię cechowania, ale oczywiście cząstki wektorowe, o których tu mówimy, nie podlegają symetrii cechowania. Z tych rozważań wynika, że dla fermionów o spinie 1/2 powinna obowiązywać liniowa reakcja masowa, że gdyż w równaniu Diraka masa występuje liniowo.

Zauważmy, że z punktu widzenia własności transformacyjnych  $\lambda_8$  jest składową zbioru nieredukowalnych operatorów tensorowych, transformujących się jak oktet SU(3):

$$H' \sim O_8^{(\mathbf{8})} \quad (17)$$

W reprezentacji fundamentalnej operatory te mają jawną postać macierzy Gell-Manna. Aby obliczyć działanie takiego operatora na stany z innych reprezentacji posłużymy się twierdzeniem Eckarta-Wignera, które mówi, że elementy macierzowe operatora tensorowego są proporcjonalne do współczynników Clebscha-Gordana. Stałe proporcjonalności, tzw. zredukowane elementy macierzowe, zależą od konkretnych reprezentacji, ale nie od liczb kwantowych konkretnych stanów. Ponieważ  $|(\mathbf{8}) 8\rangle = |(\mathbf{8}) 0, 0, 0\rangle$ , mamy

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(\mathbf{8})} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle &= \alpha_1 \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}_1 \\ 0, 0, 0 & Y, I, I_3 & Y, I, I_3 \end{array} \right) \\ &+ \alpha_2 \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}_2 \\ 0, 0, 0 & Y, I, I_3 & Y, I, I_3 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Wynik zależy od 2 stałych, gdyż w rozkładzie  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$  pojawiają się dwa oktety. Ponieważ  $O_8^{(\mathbf{8})}$  ma izospin 0, to współczynniki izospinowe C-G są równe 1, a stąd współczynniki SU(3) są w tym wypadku równe współczynnikom izoskalarnym, które wynoszą:

	$\mathbf{8}_1$	$\mathbf{8}_2$	
$\overline{K}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	
$\pi$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	
$\eta$	$0$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	
$\overline{K}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	(19)

Element macierzowy (18) można sparametryzować analitycznie:

$$\langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(\mathbf{8})} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle = a' + bY + c \left[ I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right], \quad (20)$$

gdzie stałe  $a', b$  oraz  $c$  są pewnymi kombinacjami stałych  $\alpha_{1,2}$ . Zatem kwadraty mas mezonów pseudoskalarnych wyrażają się wzorem

$$M^2 = a + bY + c \left[ I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right], \quad (21)$$

gdzie stała  $a$  zawiera stałą  $a'$  plus przyczynek od masy  $m$  (wkład niezaburzony).

Zauważmy, że – ponieważ stany o  $Y = -1$  są antycząstkami stanów  $Y = 1$  (Rys. 1), więc powinny mieć równe masy – dla mezonów  $b = 0$ . Stąd:

$$\begin{aligned} M_K^2 &= a + \frac{1}{2}c, \\ M_\pi^2 &= a + 2c, \\ M_{\eta_8}^2 &= a, \end{aligned} \quad (22)$$

Ponieważ trzy różne masy zależą od tylko od dwóch parametrów, mamy jedną relację między masami (Gell-Mann, Okubo):

$$4M_K^2 = M_\pi^2 + 3M_\eta^2. \quad (23)$$

Przyjmując za masę cząstki średnią z różnych stanów ładunkowych mamy (masy w MeV):

$$\begin{aligned} 4 \times (495.64)^2 &= (138.04)^2 + 3 \times (547.86)^2 \\ 982\,652 &= 919\,513 \end{aligned} \quad (24)$$

co daje dokładność 6,5% liczoną jako różnica strony lewej i prawej podzielona przez ich średnią. Gdyby formułę tę napisać dla mas a nie dla ich kwadratów, jej dokładność byłaby dwa razy gorsza, ale w sumie też niezła.

Dla mezonów wektorowych, przyjmując  $M_{K^*} = 892$  MeV oraz  $M_\rho = 775$  MeV relacja

$$\frac{4M_{K^*}^2 - M_\rho^2}{3} = M_\omega^2 \quad (25)$$

daje  $M_\omega = 927$  MeV, podczas gdy doświadczalnie  $M_\omega = 783$  MeV. Ta duża różnica nie znika nawet gdyby przyjąć liniową relację masową (wówczas  $M_\omega = 931$  MeV).

Słaba zgodność relacji (25) z doświadczeniem wynika z faktu, że symetria SU(3) jest naruszona. Podobnie jak w przypadku mezonów pseudoskalarnych oczekujemy, że powinien istnieć wektorowy mezon będący skalarem SU(3). Rzeczywiście w tablicach cząstek możemy znaleźć cząstkę  $\phi$  o masie 1020 MeV i izospinie 0. Ze względu na łamanie symetrii

SU(3) obserwowalne cząstki fizyczne, nie muszą być „czystymi” stanami SU(3) tylko ich „mieszankami”:

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \cos\theta |\omega_8\rangle - \sin\theta |\omega_0\rangle, \\ |\phi\rangle &= \sin\theta |\omega_8\rangle + \cos\theta |\omega_0\rangle, \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie „masa”  $M_8^2$  stanu  $|\omega_8\rangle$  spełnia regułę GMO (25). Oznacza to, że w bazie stanów SU(3) macierz mas w tym sektorze nie jest diagonalna:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_8^2 & V_{80}^2 \\ V_{08}^2 & M_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\omega^2 & 0 \\ 0 & M_\phi^2 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Odwracając tę relację dostajemy:

$$\begin{bmatrix} M_8^2 & V_{80}^2 \\ V_{08}^2 & M_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\omega^2 \cos^2\theta + M_\phi^2 \sin^2\theta & (M_\phi^2 - M_\omega^2) \sin\theta \cos\theta \\ (M_\phi^2 - M_\omega^2) \sin\theta \cos\theta & M_\phi^2 \cos^2\theta + M_\omega^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Z równania

$$M_8^2 = M_\omega^2 \cos^2\theta + M_\phi^2 \sin^2\theta \quad (29)$$

dostajemy

$$\sin\theta = \pm \sqrt{\frac{M_8^2 - M_\omega^2}{M_\phi^2 - M_\omega^2}} = \pm 0.76 \quad (30)$$

Łatwo się przekonać, że stany (26) rzeczywiście diagonalizują macierz mas. Podstawiając (5) do (26)

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \cos\theta (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) + 2|s\bar{s}\rangle - \sqrt{2}\sin\theta (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle) \right], \\ |\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ \sin\theta (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) + 2|s\bar{s}\rangle + \sqrt{2}\cos\theta (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

widzimy, że jeśli

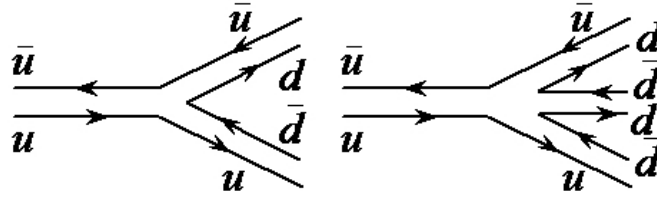
$$\sin\theta = -\sqrt{2}\cos\theta \rightarrow \sin\theta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0.81 \quad (32)$$

to

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle), \\ |\phi\rangle &= |s\bar{s}\rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

Warto dodać, że gdyby dla mezonów wektorowych zastosować liniową relację masową GMO, kąt mieszania byłby bardzo podobny:  $\sin\theta = \pm 0.78$ .

Znajomość składu kwarkowego mezonów wektorowych pozwala na jakościową analizę ich rozpadów przez oddziaływania silne. Zauważmy, że ponieważ mezony pseudoskalarne są najbliższymi z mezonów, mogą rozpadać się poprzez oddziaływania słabe lub elektromagnetyczne, ale nie poprzez oddziaływania silne. Rozpad poprzez oddziaływania silne



Rysunek 2: Rozpad silny mezonu  $\omega$ .

polega na wykreowaniu z próżni pary kwark-antykwar (najłatwiej wykreować oczywiście parę lekkich kwarków), lub kilku takich par, które następnie tworzą nowe, lżejsze mezony pseudoskalarne. Najprostsze takie rozpady mezonu  $\omega$  pokazane są na rysunku 2.

Ponieważ mezon  $\omega$  składa się głównie z kwarków  $u$  i  $d$ , więc głównym kanałem rozpadu powinien być rozpad na dwa piony (łatwiej jest wykreować z próżni jedną parę kwarków niż dwie). Jednak doświadczalnie taki rozpad jest bardzo rzadki (zaledwie 1,5 %), natomiast rozpad na trzy cząstki  $\pi$  jest dominujący (89 %). Wiąże się to z zachowaniem izospinu w oddziaływaniach silnych. Ponieważ  $\omega$  jest singletem izospinowym dwa piony w stanie końcowym należy złożyć na stan  $|I = 0, I_3 = 0\rangle$ . Pamiętając, że cząstki  $\pi$  tworzą tryplet izospinowy ( $I = 1$ ), musimy popatrzeć na odpowiednie współczynniki Clebscha-Gordana:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|\pi^+\rangle |\pi^-\rangle + |\pi^-\rangle |\pi^+\rangle - |\pi^0\rangle |\pi^0\rangle). \quad (34)$$

Mezon  $\omega$  ma parzystość  $-$ , podobnie jak mezony  $\pi$ . W związku z tym dwa mezony  $\pi$  powinny być w stanie o przestrzennej parzystości równej  $-$ , co oznacza, że funkcja falowa stanu końcowego powinna być antysymetryczna przy przestawieniu

$$|a\rangle |b\rangle \rightarrow |b\rangle |a\rangle. \quad (35)$$

Tak jest przy rozpadzie mezonu  $\rho^0 = |1, 0\rangle$

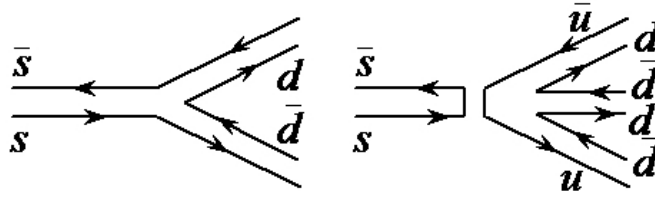
$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^+\rangle |\pi^-\rangle - |\pi^-\rangle |\pi^+\rangle) \quad (36)$$

i dlatego mezon  $\rho$  rozpada się niemal w 100% na dwa piony. Natomiast rozpad  $\omega \rightarrow \pi\pi$  jest „zakazany”.

Z kolei cząska  $\phi$  może się bez problemu rozpaść na dwa mezony  $K$ , które są dubletami izospinowymi, gdyż

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right). \quad (37)$$

Rzeczywiście rozpad  $\phi \rightarrow K^+ K^-$ ,  $K^0 \bar{K}^0$  stanowi 83% wszystkich rozpadów  $\phi$ . Rozpad na 3 piony zachodzi na poziomie 15%. Wiąże się to z faktem, że kwarki dziwne muszą zanihilować, tak jak to pokazuje drugi diagram na rysunku 3. Tłumienie takich rozpadów nazywane jest regułą Zweiga.



Rysunek 3: Rozpad silny mezonu  $\phi$ .

### 1.3 Klasyfikacja barionów

Bariony to cząstki złożone z trzech kwarków. Zobaczmy jakie reprezentacje SU(3) można skonstruować z trzech kwarków:

$$\begin{array}{rcc}
 \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} & = & \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6} \\
 \otimes \mathbf{3} & & \swarrow \quad \searrow \\
 \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} & & \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}
 \end{array} \tag{38}$$

Ze względu na to, że mamy do czynienia z trzema kwarkami spodziewamy się, że najlżejsze bariony będą miały spin  $1/2$  lub  $3/2$ , choć możliwe są także spiny wyższe (i występują takie eksperymentalnie) ze względu na kręt orbitalny (rotacja kwarków w przestrzeni). Konstruując bariony musimy uwzględnić zakaz Pauliego. Znane dzisiaj bariony można podzielić na 20 multipletów (V. Guzey, M.V. Polyakov hep-ph/0512355). Tu zajmiemy się najlżejszymi barionami: oktetem o spinie  $1/2$  i dekupletem o spinie  $3/2$ . Nie obserwuje się najlżejszego singletu (bez krętu orbitalnego).

Zastanówmy się najpierw, dlaczego oktet ma spin  $1/2$  a dekuplet  $3/2$ . Patrząc na diagram Younga dla oktetu widzimy, że dwa kwarki w kolumnie antysymetryzujemy, w związku z czym antysymetryzujemy też spin, co daje  $s = 0$ . Do takiego układu dodajemy trzeci kwark i cały układ ma spin  $1/2$ . Z kolei w dekuplecie mamy kompletnie symetryczny układ trzech kwarków. Symetryzacja trzech spinów daje spin  $3/2$ . Z kolei singlet SU(3) to kompletnie antysymetryczny stan  $uds$ , dlatego nie da się skonstruować bez krętu orbitalnego stanu o  $s = 1/2$  lub  $3/2$ .

Uwzględnienie masy kwarku dziwnego  $m_s > m$  prowadzi do łamania symetrii SU(3) i rozszczepienia masowego w oktecie i dekuplecie. Dla oktetu masy (nie ich kwadraty!) barionów wyrażają się wzorem (21), przy czym stałe  $a$ ,  $b$  i  $c$  są oczywiście inne niż dla mezonów, w szczególności  $b \neq 0$ . Przyjmując średnie masy (w MeV) mamy:

$$\begin{aligned}
 N(939) &= a + b + \frac{1}{2}c, \\
 \Lambda(1116) &= a, \\
 \Sigma(1193) &= a + 2c, \\
 \Xi(1318) &= a - b + \frac{1}{2}c.
 \end{aligned} \tag{39}$$



Cztery masy wyrażone są w równaniu (39) przez 3 stałe, zatem istnieje jedna relacja między nimi (Gell-Mann, Okubo):

$$m_N + m_\Xi = \frac{1}{2}(3m_\Lambda + m_\Sigma). \quad (40)$$

Podstawiając wartości mas otrzymujemy (w MeV):

$$2257 = 2270.5.$$

Widzimy zatem, że relacja GMO dla podstawowego oktetu spełniona jest na poziomie 0,6%!

Dla dekupletu otrzymujemy bardzo prostą relację

$$M = a + bY. \quad (41)$$

Oznacza to, że poszczególne „szczeble” dekupletu są równoodległe:

$$\Omega(1672) - \Xi^*(1530) = \Xi^*(1530) - \Sigma^*(1385) = \Sigma^*(1385) - \Delta(1232). \quad (42)$$

Podstawiając wartości mas otrzymujemy (w MeV):

$$142 = 145 = 153.$$

Sukcesem modelu kwarków było przewidzenie istnienia cząstki  $\Omega$  i podanie jej masy. Jednakże do dziś nie został zmierzony spin  $\Omega$ !

## 1.4 Ograniczenia modelu kwarków

Widzimy, że w trakcie omawiania spektr mezonów i barionów traktowaliśmy kwarki jako rzeczywiste składniki cząstek, a nie jedynie jako matematyczny trick służący do opisu multipletów SU(3). Ten sposób myślenia dał podwaliny nierelatywistycznemu modelowi kwarków, w którym zakłada się, że kwarki poruszają się w pewnym uśrednionym potencjale i zaniedbuje się oddziaływania między nimi. Uwzględniając spin, można dość łatwo napisać funkcję falową, która faktoryzuje się na część przestrzenną, spinową, i kwarkową (ang. *flavor*)

$$\psi = \psi_{\text{przestrzeń}} \psi_{\text{spin}} \psi_{\text{flavor}}. \quad (43)$$

Tu pojawia się pierwszy problem. Gdybyśmy chcieli napisać funkcję falową dla cząstki  $\Delta^{++}$ , która składa się z trzech kwarków  $u$  i ma spin  $3/2$ , to funkcja falowa o  $s_3 = +3/2$  miałaby postać:

$$\psi_{\Delta^{++}}^{3/2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = u^\uparrow(\vec{r}_1)u^\uparrow(\vec{r}_2)u^\uparrow(\vec{r}_3). \quad (44)$$

Widzimy, że funkcja ta jest całkowicie symetryczna, co jest sprzeczne z zakazem Pauliego; przy przestawieniu dwóch fermionów  $f$ . falowa powinna zmieniać znak. Doprowadziło to do postulowania dodatkowej liczby kwantowej, która powodowałaby, że funkcja barionu  $\Delta$  byłaby antysymetryczna:

$$\psi_{\Delta^{++}}^{3/2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \mathcal{N} \varepsilon^{abc} u_a^\uparrow(\vec{r}_1) u_b^\uparrow(\vec{r}_2) u_c^\uparrow(\vec{r}_3). \quad (45)$$

Tę nową liczbę kwantową nazwano kolorem (gdyż przyjmuje 3 wartości:  $a, b, c = 1, 2, 3$ ). Stąd pełna funkcja falowa barionu

$$\psi = \psi_{\text{przestrzeń}} \psi_{\text{spin}} \psi_{\text{flavor}} \psi_{\text{kolor}} \quad (46)$$

spełnia zakaz Pauliego. Dziś kolor interpretujemy w języku lokalnej symetrii cechowania opartej na grupie  $SU(3)$ . Czyli indeksy  $a, b, c$  są indeksami reprezentacji fundamentalnej grupy  $SU(3)$  zwanej kolorem. Żądanie aby funkcja falowa była całkowicie antysymetryczna wyklucza istnienie barionu będącego singletem  $SU(3)$ . Rzeczywiście, trzy kwarki będące singletem są całkowicie antysymetryczną kombinacją względem grupy  $SU(3)_{\text{kolor}}$ , ale także względem grupy  $SU(3)_{\text{flavor}}$  (zauważmy, że cząstka  $\Delta^{++}$  jest symetryczna względem tej grupy). Stąd wynika, że funkcja spinowa powinna być całkowicie antysymetryczna, a to jest nie możliwe, gdyż nie da się całkowicie zantysymetryzować trzech spinów  $1/2$ .

Istnienie koloru rozwiązuje także problem nieistnienia cząstki singletowej  $\Lambda^0 = u d s$  w stanie podstawowym. Przyjmijmy oznaczenia:

$$u = q^1, \quad d = q^2, \quad s = q^3. \quad (47)$$

Wówczas stan singletowy

$$\Lambda^0 = \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} q_a^i(s_1) q_b^j(s_2) q_c^k(s_3). \quad (48)$$

Aby funkcja falowa  $\Lambda^0$  była całkowicie antysymetryczna, powinna być również antysymetryczna w spinach  $s_{1,2,3}$ , a to jest niemożliwe dla trzech spinów.

Drugi problem związany z modelem kwarków polega na tym, że nie udało się zaobserwować swobodnych kwarków. Doprowadziło to sformułowania zasady, że cząstki obserwowalne w przyrodzie są singletami kolorowymi. Jak widzieliśmy singlet  $SU(3)$  pojawia się w złożeniu 3 kwarków  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$  oraz kwarku i antykwarku  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ , a także przy składaniu większej liczby kwarków i antykwarków. Stąd cząstkami, które obserwujemy w przyrodzie są mezony i bariony, ale możliwe są też tetrakwarki ( $qq\bar{q}\bar{q}$ ), czy pentakwarki ( $qqqq\bar{q}$ ).

Trzeci problem, to właściwie zupełny brak uzasadnienia, dlaczego podejście nierelatywistyczne miałyby się stosować do lekkich kwarków i dlaczego można pominąć oddziaływanie między kwarkami. Podejście nierelatywistyczne może mieć uzasadnienie w przypadku ciężkich kwarków  $c$  i  $b$ . Alternatywnym podejściem (np. podręcznik Griffith'a) jest uwzględnienie oddziaływania poprzez oddziaływanie spinów kwarków. To podejście znowu słabo uzasadnione dla lekkich kwarków daje zaskakująco dobre wyniki w przypadku kwarków ciężkich.

Jak widzieliśmy, aby poprawnie skonstruować funkcje falową barionu w modelu kwarków, trzeba było uwzględnić spin. Ta obserwacja doprowadziła do zapostulowania szerszej symetrii, mianowicie  $SU(6)$  (flavor  $\times$  spin). Wyniki tej klasyfikacji cząstek wychodzą poza ramy tego wykładu.

## 1.5 Ciężkie kwarki

Oprócz kwarków lekkich podlegających (przybliżonej) symetrii  $SU(3)$  mamy jeszcze kwarki ciężkie: charm (powabny) o masie rzędu  $1.28 \text{ GeV}$  i ładunku  $2/3$ , bottom (czasami też

określany jako beauty) o masie 4.66 GeV i ładunku  $-1/3$ , oraz kwark top o masie 173 GeV. Kwark  $t$  jest silnie niestabilny, bardzo szybko się rozpada i nie tworzy stanów związanych. Z kolei kwarki  $c$  i  $b$  mogą tworzyć tzw. kwarkonia, czyli cząstki typu  $c\bar{c}$  i  $b\bar{b}$  oraz cząstki typu  $q\bar{Q}$  (lub  $\bar{q}Q$ , gdzie  $Q = c, b$  natomiast  $q = u, d, s$ ). Cząstki te odkryto w anihilacji  $e^+e^-$  na foton, który rozpadał się następnie na parę  $Q\bar{Q}$  w stanie o spinie 1:  $J/\psi(3096) = c\bar{c}$  oraz  $\Upsilon(9460) = b\bar{b}$ . Nie są to jednak najlżejsze cząstki tego typu. Nijlżejsze to cząstki o spinie 0  $\eta_c(2983)$  oraz  $\eta_b(9399)$ . Mezony z jednym kwarkiem  $c$  i jednym antykwarkiem  $q$  (lub odwrotnie) nazywają się mezonami  $D$ , a mezony z (anty)kwarkiem  $b$  oznaczamy jako  $B$ .

Dużo bardziej interesująca jest sytuacja dla barionów. Znamy obecnie wiele barionów typu  $Qqq$ , a ostatnio eksperyment LHCb w CERNie odkrył cząstkę  $\Xi_{cc}^{++}(3621)$  (co jest w sprzeczności ze starym pomiarem  $\Xi_{cc}^+(3519)$  z eksperymentu SELEX).

Ponieważ dwa lekkie kwarki mogą utworzyć albo  $\mathbf{\bar{3}}$  o spinie 0, albo  $\mathbf{6}$  o spinie 1, dodanie kwarku  $Q$  powoduje, że powinniśmy mieć jeden antytryplet o spinie 1/2 i dwa prawie zdegenerowane sextety o spinie 1/2 i 3/2. Rzeczywiście takie struktury obserwujemy.

Bariony charmowe o spinie 1/2 należące do antytrypletu mają następujące masy (GeV):

$$\begin{aligned} \Lambda_c^+(cud) &: 2287 \\ \Xi_c^0(cds) &: 2471 \quad \Xi_c^+(cus) : 2468 \end{aligned} \quad (49)$$

Baryony z kwarkiem  $b$

$$\begin{aligned} \Lambda_b^0(bud) &: 5619 \\ \Xi_b^-(bds) &: 5794 \quad \Xi_b^0(bus) : 5792 \end{aligned} \quad (50)$$

Sextet charmowy o spinie 1/2

$$\begin{aligned} \Sigma_c^0(cdd) &: 2454 \quad \Sigma_c^+(cud) : 2453, \quad \Sigma_c^{++}(cuu) : 2454 \\ \Xi_c^{\prime 0}(csd) &: 2578 \quad \Xi_c^{\prime +}(csu) : 2576 \\ \Omega_c^0(css) &: 2695 \end{aligned}$$

i o spinie 3/2

$$\begin{aligned} \Sigma_c^{*0} &: 2518.5 \quad \Sigma_c^{*+} : 2517.5, \quad \Sigma_c^{*++} : 2518 \\ \Xi_c^{*0} &: 2646 \quad \Xi_c^{*+} : 2646 \\ \Omega_c^{*0} &: 2766 \end{aligned}$$

W sektorze kwarków  $b$  sytuacja jest mniej jasna. Dla spinu 1/2 mamy

$$\begin{aligned} \Sigma_b^-(bdd) &: 5815 \quad \Sigma_b^0(bud) : "5813", \quad \Sigma_b^+(buu) : 5811 \\ \Xi_b^{\prime -}(bsd) &: 5935 \quad \Xi_b^{\prime 0}(bsu) : "5935" \end{aligned}$$

$$\Omega_b^-(bss) : 6048$$

gdzie liczby w cudzysłowie oznaczają, że masy te nie zostały zmierzone, ale przyjęte jako równe zmierzonym partnerom izospinowym.

W sektorze o spinie 3/2 sytuacja jest jeszcze mniej jasna:

$$\Sigma_b^{*-} : 5835 \quad \Sigma_b^{*0} : "5833", \quad \Sigma_b^{*+} : 5832$$

$$\Xi_b^{*-} : 5955 \quad \Xi_b^{*0} : "5955"$$

$$\Omega_b^{*-} : "6068"$$

Założyliśmy  $\Xi_b^{*0} = \Xi_b^{*-}$ . Wtedy rozszczepienie  $\Xi - \Sigma$  w obu przypadkach wynosi 122 MeV. W multipletach 1/2 rozszczepienie  $\Omega - \Xi$  wynosi 116 MeV. Zakładając to samo rozszczepienie dla 3/2 wyliczyliśmy masę  $\Omega_b^{*-}$ , która nie jest znana.

## 1.6 Stany wielokwarkowe