

# 1 Grupa SU(3) c.d.

## 1.1 Szereg Clebscha-Gordana dla grupy SU(3)

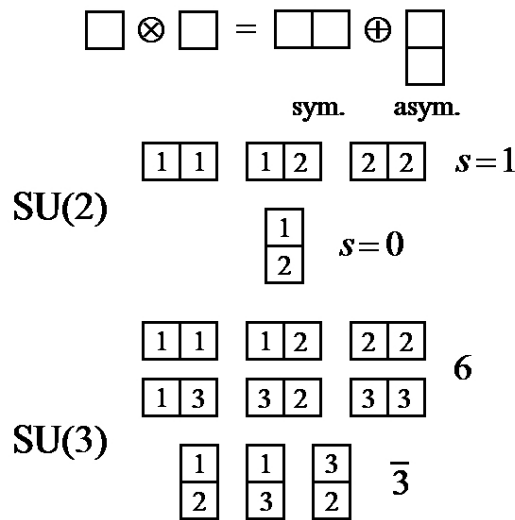
Iloczyn dwóch reprezentacji grupy SU(2) o spinach  $s_1$  i  $s_2$  rozkładamy na sumę nieredukowalnych reprezentacji o spinach

$$|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2. \quad (1)$$

Aby wykonać analogiczny rozkład dla grupy SU(3) warto posłużyć się tzw. diagramami Younga. Diagramy te składają się z kratek (komórek), które oznaczają wektor reprezentacji fundamentalnej. W przypadku iloczynu dwóch wektorów reprezentacji fundamentalnej  $u_i$  gdzie  $i = N$ , iloczyn taki rozkładamy na część symetryczną i antysymetryczną

$$S_{ij} = u_i w_j + w_i u_j, \quad A_{ij} = u_i w_j - u_j w_i. \quad (2)$$

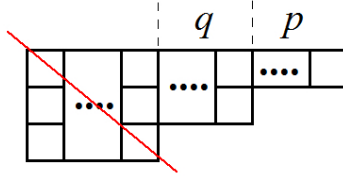
Tensory  $S$  i  $A$  odpowiadają dwóm nieredukowalnym reprezentacjom, których wymiar zależy od  $N$ . W przypadku spinu 1/2 mamy spin 1 ( $S$ ) oraz spin 0 ( $A$ ). Na diagramach Younga iloczyn symetryczny dwóch komórek oznacza się rysując je poziomo jedną obok drugiej, a antysymetryzacja jest wtedy, gdy umieszczamy je w pionie (Rys. 1).



Rysunek 1: Diagramy Younga dla iloczynu dwóch reprezentacji fundamentalnych.

Kolumny w diagramach Younga mają maksymalny wymiar  $N$ , gdyż jest to największa liczba indeksów reprezentacji fundamentalnej grupy SU( $N$ ), którą można zantysymetryzować (symbol  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$  jest niezmiennikiem grupy SU( $N$ )).  $N$  wymiarowa kolumna odpowiada zatem singletowi (nie transformuje się względem transformacji SU( $N$ )) i można ją z diagramu Younga wykreślić. Zatem „generyczny” diagram Younga dla grupy SU(3) składa się z  $p$  kolumn o jednej komórce,  $q$  kolumn o dwóch komórkach i pewnej liczbie

kolumn o 3 komórkach, które wykreślamy, tak jak to jest pokazane na rysunku 2. W ten sposób uzyskaliśmy interpretację etykiet reprezentacji grupy SU(3) w formie  $(p, q)$ . Ponieważ, jak widzieliśmy na przykładzie z Rys. 1 dwukomórkowa kolumna odpowiada reprezentacji antytrypletowej, popularna interpretacja pary  $(p, q)$  sprowadza się do tego, że jest to reprezentacja złożona z  $p$  kwarków i  $q$  antykwarków. Na koniec zauważmy, że dla dowolnej reprezentacji  $(p, q)$  sprzężona reprezentacja  $(q, p)$  odpowiada diagramowi Younga dopełniającemu diagram Younga  $(p, q)$  do singletu.



Rysunek 2: „Generyczny” diagram Younga dla grupy SU(3).

Diagramy Younga są bardzo pomocne w konstruowaniu szeregu Clebscha-Gordana dla grupy SU(3) (czy ogólnie SU( $N$ )). Rysujemy diagramy Younga dla reprezentacji, które chcemy pomnożyć:  $(p_1, q_1) \otimes (p_2, q_2)$ . W drugim diagramie wszystkie komórki w pierwszym wierszu oznaczamy przez  $a$ , a komórki w drugim wierszu przez  $b$ . Następnie wszystkie komórki  $a$  z pierwszego rzędu dodajemy do diagramu  $(p_1, q_1)$ , tak aby nie były one w jednej kolumnie. W ten sposób generujemy kilka nowych diagramów Younga, do których dodajemy komórki  $b$ , tak aby nie były one w jednej kolumnie (i tak aby były spełnione ogólne zasady konstrukcji diagramów Younga: drugi wiersz nie może być dłuższy od pierwszego, a trzeci od drugiego, kolumny mogą mieć co najwyżej 3 komórki) i aby spełniony był dodatkowy warunek: idąc wzdłuż wierszy diagramu Younga od prawej do lewej i od góry do dołu, liczba napotkanych komórek  $a$  musi być równa lub większa od liczby komórek  $b$ . Na końcu wykreślamy wszystkie singlety i obliczamy wymiar reprezentacji przy pomocy wzoru:

$$\dim(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2), \quad (3)$$

Procedura ta jest zilustrowana na rysunku 3, gdzie skonstruowano szereg C-G:

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}_1 \oplus \mathbf{8}_2 \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{27}. \quad (4)$$

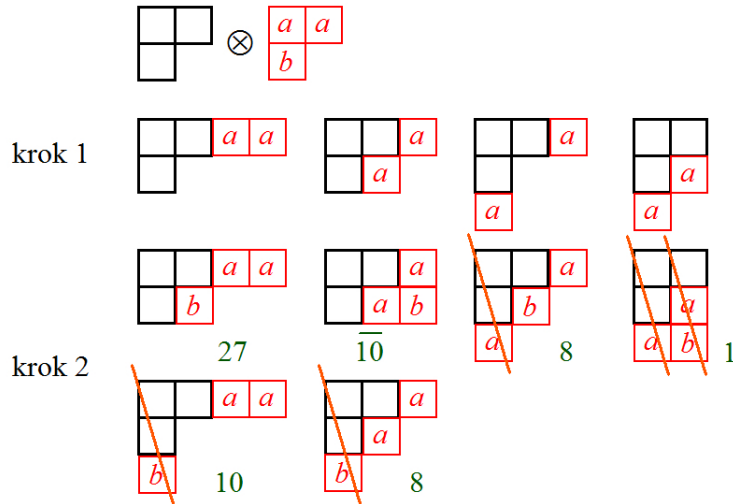
Widzimy, że w tym szeregu pojawiają się dwa różne oktety.

Istnienie dwóch oktetów jest pewną nowością a także trudnością w porównaniu z grupą SU(2). Przypomnijmy sobie ważny wzór na mnożenie dwóch macierzy Pauliego:

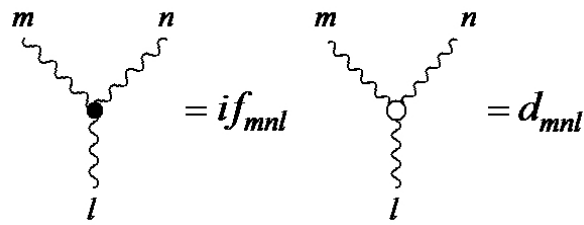
$$\tau_m \tau_n = \delta_{mn} \mathbf{1} + i \varepsilon_{mnl} \tau_l. \quad (5)$$

Analogiczny wzór na mnożenie dwóch macierzy Gell-Manna zawiera dodatkowy człon:

$$\lambda_m \lambda_n = \frac{2}{3} \delta_{mn} \mathbf{1} + i f_{mnl} \lambda_l + d_{mnl} \lambda_l. \quad (6)$$

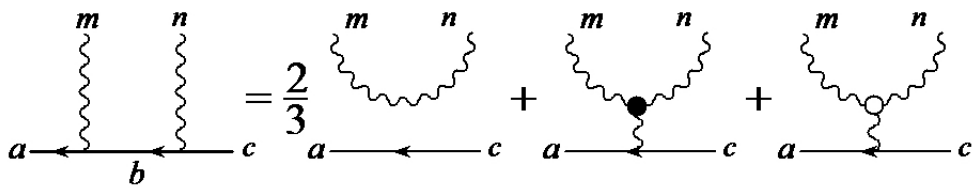


Rysunek 3: Mnożenie dwóch reprezentacji dołączonych grupy SU(3) przy pomocy diagramów Younga.



Rysunek 4: Graficzna notacja dla  $f_{mnl}$  oraz  $d_{mnl}$ .

Stałe  $d_{mnl}$  są tensorami całkowicie symetrycznymi. Warto za Cvitanowiciem wprowadzić notację graficzną pokazaną na rysunku 4. Wówczas równanie (6) daje się „narysować” jak na rysunku 5.



Rysunek 5: Graficzna reprezentacja równania (6).

Podobnie jak w przypadku grupy SU(2), do konkretnych obliczeń będziemy potrzebować współczynników Clebscha-Gordana dla SU(3). Faktoryzują się one na zwykły współ-

czynnik C-G dla izospinu i tzw. czynnik izoskalarny:

$$\left( \begin{array}{cc|c} (p_1, q_1) & (p_2, q_2) & (p, q)_\gamma \\ Y^{(1)}, I_3^{(1)} & Y^{(2)}, I_3^{(2)} & Y, I, I_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} I^{(1)} & I^{(2)} & I \\ I_3^{(1)} & I_3^{(2)} & I_3 \end{array} \right) \quad (7)$$

$$\times \left( \begin{array}{cc|c} (p_1, q_1) & (p_2, q_2) & (p, q)_\gamma \\ Y^{(1)}, I^{(1)} & Y^{(2)}, I^{(2)} & Y, I \end{array} \right),$$

gdzie czynnik  $\gamma$  oznacza degenerację (jak w przykładzie na iloczyn dwóch oktetów).

Widzimy z rysunku 4, że w istocie współczynniki  $f_{mnl}$  oraz  $d_{mnl}$  są współczynnikami składania dwóch oktetów (stany  $m$  i  $n$ ) na oktet (stan  $l$ ). Są to współczynniki wyrażone w bazie  $|m\rangle$ , natomiast współczynniki C-G z równania (7) są wyrażone w bazie  $|Y, I, I_3\rangle$ . Współczynniki te można „przetłumaczyć” jedno na drugie przy pomocy macierzy transformujących bazy. Widzimy zatem, że dwa oktety pojawiające się w rozkładzie (4) odpowiadają złożeniu symetrycznemu i antysymetrycznemu dwóch oktetów wyjściowych.

Obszerne omówienie własności grupy  $SU(3)$  wraz z konwencjami dotyczącymi współczynników C-G, oraz tabele czynników izoskalarnych można znaleźć w przeglądowej pracy de Swarta z 1963 roku. Rozbudowane tablice współczynników C-G rok później opublikowali McNamee i Chilton. Obecnie w celu znalezienia współczynników C-G najwygodniej posłużyć się programem opublikowanym przez Kaedinga lub opublikowanymi przez niego tablicami.

J.J. de Swart, *Rev. Mod. Phys.* **35** (1963) 916,

P. McNamee, F. Chilton, *Rev. Mod. Phys.* **36** (1964) 1005,

T.A. Kaeding, *Comput. Phys. Commun.* **85** (1995) 82

T.A. Kaeding, *Tables of  $SU(3)$  isoscalar factors*, <http://arxiv.org/pdf/nucl-th/9502037.pdf>