

# 1 Grupa SU(3) i klasyfikacja cząstek

## 1.1 Grupa SU(N)

Unitarne (zespolone) macierze  $N \times N$  można sparametryzować przez  $2N^2$  rzeczywistych parametrów. Ale

- $\det U = 1$ ,
- unitarność:  $U^\dagger U = 1$

narzucają dodatkowe warunki. Rozważmy warunek drugi:

$$\begin{bmatrix} [ & \vec{u}_1^\dagger & ] \\ & \cdots & \\ [ & \vec{u}_n^\dagger & ] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [ \vec{u}_1 ] \\ \cdots \\ [ \vec{u}_n ] \end{bmatrix} = 1, \quad (1)$$

(gdzie  $\vec{u}_i$  są  $N$  wymiarowymi wektorami zespolonymi) co daje  $N^2$  równań zespolonych:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_1 &= 1, \quad \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_2 = 0, \quad \dots \quad \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_n = 0, \\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_1 &= 0, \quad \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_2 = 1, \quad \dots \quad \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_n = 0, \\ &\vdots \\ \vec{u}_n^\dagger \vec{u}_1 &= 0, \quad \vec{u}_n^\dagger \vec{u}_2 = 0, \quad \dots \quad \vec{u}_n^\dagger \vec{u}_n = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Ale, oprócz równań diagonalnych  $\vec{u}_i^\dagger \vec{u}_i = 1$ , pozostałe równania są parami zależne, np.:  $\vec{u}_1^\dagger \vec{u}_2 = 0$  oraz  $\vec{u}_2^\dagger \vec{u}_1 = 0$ . Zatem niezależne są tylko równania „nad diagonalną”, których jest  $(N^2 - N)/2$  oraz te na diagonalnej których jest  $N$ . Jednak równania „nad diagonalną” są zespolone, a więc dają  $N^2 - N$  warunków rzeczywistych, natomiast równania „na diagonalii” są rzeczywiste i dają  $N$  warunków rzeczywistych. Zatem unitarność daje  $N^2$  warunków rzeczywistych.

Zauważmy, że równanie (1) gwarantuje, że  $|\det U| = 1$ , zatem warunek  $\det U = 1$  określa dodatkowo tylko fazę  $U$ , czyli daje dodatkowo jeden warunek rzeczywisty (a nie dwa, jakby się można spodziewać).

Zatem całkowita liczba parametrów opisująca macierz SU(N) wynosi:

$$2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1. \quad (3)$$

Wygodną metodą parametryzacji macierzy SU(N) jest forma exponencjalna

$$U = \exp \left( -i \sum_{n=1}^{N^2-1} \alpha_n T_n \right) = e^{-i \vec{\alpha} \cdot \vec{T}} \quad (4)$$

gdzie  $\vec{\alpha}$  jest  $N^2 - 1$  wymiarowym wektorem rzeczywistym, a  $N^2 - 1$  hermitowskich (bo musi być  $U^\dagger U = 1$ ) macierzy  $N \times N$  oznaczonych jako  $T_n$ , nazywanych jest generatorami grupy SU(N). Dodatkowo macierze  $T_n$  są bezśladowe, co wynika z tożsamości

$$\det U = \exp(\text{Tr} \log U). \quad (5)$$

Znany przykład z grupy SU(2):

$$T_n = \frac{1}{2}\tau_n, \quad n = 1, 2, 3, \quad (6)$$

gdzie  $\tau_n$  są macierzami Pauliego. Czynniki  $1/2$  jest kwestią konwencji.

Aby macierz  $U$  była rzeczywiście jednoznacznie sparametryzowana przez  $N^2 - 1$  parametrów  $\alpha_n$ , macierze  $T_n$  muszą być liniowo niezależne, tzn.

$$\text{jeżeli } \vec{\alpha} \cdot \vec{T} = 0 \text{ to } \vec{\alpha} \equiv 0.$$

Ten warunek jest spełniony gdy

$$\text{Tr}(T_m T_n) = \frac{1}{2}\delta_{mn}. \quad (7)$$

Tu znowu  $1/2$  jest konwencją.

Warto, za Cvitanowiciem, przyjąć konwencję graficzną obrazującą generatory:

$$a \xleftarrow{\text{wavy } m} b = (T_m)_{ab}$$

W tej notacji mnożenie macierzy ma postać:

$$a \xleftarrow{\text{wavy } m} b \xleftarrow{\text{wavy } n} c = (T_m)_{ab} (T_n)_{bc}$$

Dodatkowo wprowadźmy delty Kronekera i ich ślady:

$$a \xleftarrow{\text{straight}} b = \delta_{ab} \quad \text{circle} = N$$

$$m \xleftarrow{\text{wavy}} n = \delta_{mn} \quad \text{gear} = N^2 - 1$$

W tej graficznej notacji bezśladowiść generatorów i równanie (7) przyjmują postać:

$$\text{wavy line} \circlearrowleft = 0 \quad \text{wavy line } m \circlearrowleft \text{wavy line } n = \frac{1}{2} \text{wavy line } m \text{ } n$$

Oczywiście generatory  $T_m$  są nieprzemienne

$$[T_m, T_n] = if_{mnl}T_l, \quad (8)$$

gdzie całkowicie antysymetryczne stałe  $f_{mnl}$  są nazywane stałymi struktury grupy  $SU(N)$  – dla grupy  $SU(2)$  są to symbole Levi-Civity:

$$f_{mnl} = \varepsilon_{mnl}.$$

Wprowadzając notację graficzną dla stałych struktury (proszę zwrócić uwagę na zgodne z kierunkiem wskazówek zegara uporządkowanie indeksów, gdyż stałe struktury grupy są antysymetryczne):

$$\begin{array}{c} m \quad n \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{wavy lines} \\ \diagup \quad \diagdown \\ l \end{array} = if_{mnl} = -if_{nml}$$

możemy relację komutacji (8) przedstawić w następującej formie:

$$\begin{array}{c} m \quad n \\ \text{wavy lines} \\ \leftarrow \end{array} - \begin{array}{c} m \quad n \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{wavy lines} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} m \quad n \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{wavy lines} \\ \diagup \quad \diagdown \\ l \\ \leftarrow \end{array}$$

Aby w sposób jawny zdefiniować grupę  $SU(N)$  należy albo podać jawną postać generatorów  $N \times N$ , czyli jawną postać generatorów w reprezentacji *fundamentalnej* (zwanej także definiującą), albo podać wartości numeryczne stałych struktury  $f_{mnl}$ . Oczywiście są to metody równoważne: znając jawną postać generatorów można wyliczyć stałe struktury i odwrotnie, znając stałe struktury można obliczyć jawną postać generatorów nie tylko w reprezentacji fundamentalnej, ale w dowolnej reprezentacji grupy  $SU(N)$ .

## 1.2 Reprezentacje grupy $SU(2)$ i $SU(3)$

Relacja komutacji (8) jest spełniona nie tylko przez macierze  $N \times N$  definiujące grupę  $SU(N)$ , ale także przez macierze wyżej wymiarowe. Dla grupy  $SU(2)$  reprezentacja fundamentalna dana jest przez macierze Pauliego odpowiadające spinowi  $s = 1/2$ , ale wiemy że dopuszczalne są reprezentacje wyżej wymiarowe o spinie  $s = n/2$ , gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

które mają wymiar  $(2s + 1)$ . Z matematycznego punktu widzenia reprezentacja grupy jest określona przez zbiór macierzy spełniających (8), fizycy poprzez reprezentację rozumieją często *bazę*, w której macierze te działają. W przypadku grupy SU(2) taką bazą są wektory odpowiadające spinowi  $s$  i wartości własnej  $T_3$  oznaczanej jako  $m$ :

$$|s, m\rangle$$

gdzie  $m$  przyjmuje  $2s + 1$  wartości:  $-m, -m + 1, \dots, m - 1, m$ . Wynika to stąd, że dla grupy SU(2) spośród trzech generatorów  $T_{1,2,3}$  jeden można zdiagonalizować, zwyczajowo dżagonalizuje się  $T_3$ , i że diagonalny jest tzw. operatorem Casimira

$$\vec{T}^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = s(s + 1)\mathbf{1}.$$

Czyli stany w danej reprezentacji numerujemy liczbami kwantowymi odpowiadającymi wartościom własnym dwóch diagonalnych operatorów:  $\vec{T}^2$  i  $T_3$ . Zwróćmy uwagę, że liczba kwantowa  $s$  jest nie tylko jednoznacznie związana z wartością  $\vec{T}^2$  ale także z wymiarem reprezentacji, który jest równy  $2s + 1$ .

Dla grupy SU(3) sytuacja jest bardziej skomplikowana z dwóch powodów. Po pierwsze spośród 8 generatorów (pamiętajmy, że dla  $N = 3$  liczba generatorów wynosi  $N^2 - 1 = 8$ ) można jednocześnie zdiagonalizować dwa z nich. Widać to np. z jawnej postaci macierzy Gell-Mann'a, które są dla grupy SU(3) odpowiednikiem macierzy Pauliego:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Widzimy, że pierwsze trzy macierze Gell-Manna odpowiadają zanurzonym w lewym, górnym rogu macierzom Pauliego. Oznacza to, że w grupie SU(3) istnieje podgrupa SU(2), którą nazywać będziemy izospinem:  $I_{1,2,3} = T_{1,2,3} = 1/2 \lambda_{1,2,3}$ . A zatem stany bazowe będziemy numerować wartościami  $I$  i  $I_3$  odpowiadającymi tej podgrupie. Oprócz tego diagonalna jest macierz  $\lambda_8$ , a odpowiadającą jej liczbę kwantową  $Y = \lambda_8/\sqrt{3}$  nazywamy hiperładunkiem. Zatem stany bazowe dla reprezentacji fundamentalnej o wymiarze 3, oznaczane  $|(\mathbf{3})Y, I, I_3\rangle$ , to:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\mathbf{3}) -\frac{2}{3}, 0, 0 \right\rangle. \quad (10)$$

Ogólnie dla grupy  $SU(N)$  można jednocześnie zdiagonalizować  $N - 1$  generatorów (mówimy, że *rzqd* grupy  $SU(N)$  wynosi  $N - 1$ ). Oprócz tego, podanie wymiaru, lub wartości operatora Casimira nie wyznacza jednoznacznie reprezentacji. Począwszy od  $N = 3$  możemy mieć kilka reprezentacji o tym samym wymiarze, które są jednak istotnie różne (nie są unitarnie równoważne). Zauważmy, że macierze  $-T_m^*$  mają te same relacje komutacji, co macierze  $T_m$  (ze względu na to, że stałe struktury  $f_{mnl}$  są rzeczywiste). Oznacza to, że istnieje druga reprezentacja trzywymiarowa, która jest *sprzężona* do reprezentacji fundamentalnej (oznaczamy ją jako  $\bar{\mathbf{3}}$ ). Stany bazowe dla tej reprezentacji mają postać:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\bar{\mathbf{3}}) - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\bar{\mathbf{3}}) - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left| (\bar{\mathbf{3}}) \frac{2}{3}, 0, 0 \right\rangle. \quad (11)$$

Można zapytać, dlaczego w przypadku grupy  $SU(2)$  (a więc spinu), nie musieliśmy wprowadzać pojęcia reprezentacji sprzężonej. Wiąże się to z tym, że dla macierzy Pauliego istnieje macierz  $U$  taka, że

$$U\tau_m U^\dagger = -\tau_m^*, \quad (12)$$

czyli, że reprezentacja  $s = 1/2$  i reprezentacja sprzężona do niej są unitarnie równoważne. Ta własność nie zachodzi dla grup  $SU(N)$  przy  $N > 2$ . Stąd w notacji graficznej użyliśmy strzałki do oznaczenia generatorów w reprezentacji  $\mathbf{3}$ . Strzałka w przeciwną stronę oznacza reprezentację  $\bar{\mathbf{3}}$ . Ponadto, jak się przekonamy, istnieją także reprezentacje o tym samym wymiarze, które są różne i nie są wzajemnie sprzężone.

Dla grupy  $SU(2)$  relacja (12) sprowadza się do trzech równań:

$$\begin{aligned} \{U, \tau_{1,3}\} &= 0, \\ [U, \tau_2] &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Widzimy, że równania (13) implikują, że  $U \sim \tau_2$ . Macierz Pauliego  $\tau_2$  nie jest unitarna, ale  $i\tau_2$  już tak. Równania  $SU(3)$  analogiczne do (13) nie mają rozwiązania gdyż w iloczynie macierzy Gell-Manna pojawia się dodatkowa struktura symetryczna:

$$\lambda_m \lambda_n = \frac{2}{3} \delta_{mn} \mathbf{1} + i f_{mnl} \lambda_l + d_{mnl} \lambda_l. \quad (14)$$

Stany (10) i (11) wygodnie jest narysować jako punkty na płaszczyźnie  $(I_3, Y)$ , tak jak to pokazano na Rys. 1.

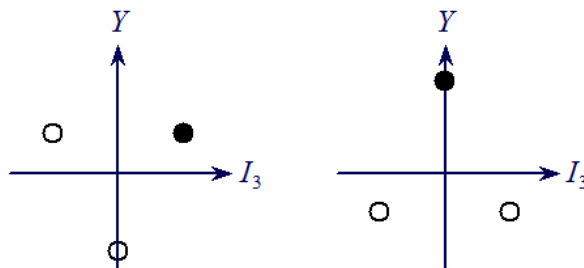
Diagramy, takie jak te pokazane na rysunku 1, nazywamy *diagramami wagowymi*.

Reprezentacje grupy  $SU(3)$  jednoznacznie da się „nazwać” przy pomocy pary liczb  $\mathcal{R} = (p, q)$ , gdzie  $p, q = 0, 1, 2, \dots$ . Najwyższa waga reprezentacji  $(p, q)$  to stan:

$$\left| (p, q) \text{ najwyższa waga} \right\rangle = \left| (p, q), Y = \frac{p+2q}{3}, I = \frac{p}{2}, I_3 = \frac{p}{2} \right\rangle. \quad (15)$$

Znane są także wzory na wymiar

$$\dim(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2), \quad (16)$$



Rysunek 1: Reprezentacja trypletowa i antytrypletowa grupy SU(3).

i wartość operatora Casimira

$$C_2(p, q) = \mathbf{T}^2 = p + q + \frac{1}{3} (p^2 + q^2 + pq). \quad (17)$$

Łatwo się przekonać, że reprezentacje pokazane na Rys. 1 to

$$\mathbf{3} = (1, 0), \quad \bar{\mathbf{3}} = (0, 1). \quad (18)$$

Zwyczajowo używa się obu zapisów na oznakowanie reprezentacji: wymiaru  $\mathbf{w}$  i  $\bar{\mathbf{w}}$  (czasami  $\mathbf{w}^*$ ) lub  $(p, q)$ .

Zauważmy, że ogólnie

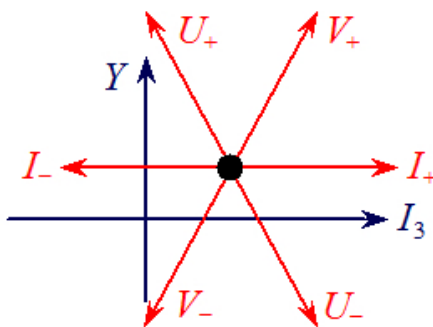
$$\overline{(p, q)} = (q, p).$$

Zatem, jeżeli  $p = q$  reprezentacja jest *samosprzeżona*.

Zauważamy, że podobnie jak dla grupy SU(2) w grupie SU(3) istnieją operatory podwyższania i obniżania, z tym że jest ich *sześć*. Zdefiniowane są w następujący sposób:

$$I_{\pm} = T_1 \pm iT_2, \quad V_{\pm} = T_4 \pm iT_5, \quad \hat{U}_{\pm} = T_6 \pm iT_7. \quad (19)$$

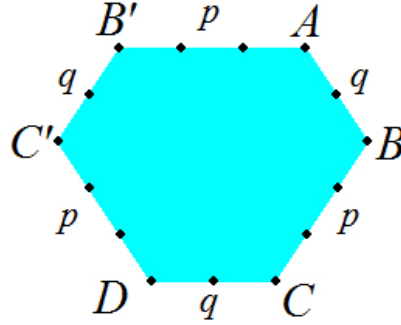
Ich działanie jest schematycznie pokazane na rysunku 2. Stan anihilowany przez  $I_+$ ,  $V_+$  oraz  $U_+$  nazywamy najwyższą wagą. Na Rys. 1 stany te zostały oznaczone czarną kropką.



Rysunek 2: Działanie operatorów  $I_{\pm}$ ,  $V_{\pm}$  i  $U_{\pm}$  na diagramie wagowym grupy SU(3).

Aby skonstruować diagram wagowy reprezentacji  $(p, q)$  postępujemy w następujący sposób. Na płaszczyźnie  $(I_3, Y)$  zaznaczamy punkt  $A$  o współrzędnych najwyższej wagi

(15). Następnie rysujemy  $q$  punktów w kierunku  $U_-$ . Ostatni z nich oznaczamy jako  $B$ . Od punktu  $B$  w kierunku  $V_-$  rysujemy  $p$  punktów – ostatni to  $C$ . I wreszcie począwszy od  $C$  rysujemy  $q$  punktów w kierunku  $I_-$  ( $D$ ). Wracamy do  $A$  i w kierunku  $I_-$  rysujemy  $p$  punktów ( $B'$ ), dalej  $q$  punktów w kierunku  $V_-$  ( $C'$ ) i w końcu  $p$  punktów w kierunku  $U_-$ . W ten sposób trafiamy do punktu  $D$ . W ten sposób powstaje obwódca diagramu wagowego, która pokazana jest na rysunku 3.



Rysunek 3: Obwódca diagramu wagowego reprezentacji  $(p, q)$ . Liczby  $p$  oraz  $q$  oznaczają liczbę kroków (odcinków) wzdłuż danej krawędzi. Liczba punktów wzdłuż takiej krawędzi jest o jeden większa.

Tak powstały diagram wypełniamy punktami wewnątrz obwódki zaczynając od punktów wzdłuż łamanej  $A - B - C$  i posuwając się w kierunku  $I_-$  co jeden. Następnie na wewnętrznych „szczeblach” (z pominięciem  $A - B'$  oraz  $C - D$ ) diagramu dodajemy punkty zdegenerowane o izospinie o 1 mniejszym niż szczebel oryginalny. Tak postępujemy, aż wyczerpią się możliwości dodawania punktów.

Na rysunku 4 pokazane są diagramy wagowe reprezentacji  $\mathbf{8} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{10} = (3, 0)$  i  $\overline{\mathbf{10}} = (0, 3)$ , które odgrywają istotną rolę w klasyfikacji cząstek. Pokazano także wyższe reprezentacje, gdzie występuje kilkakrotna degeneracja izospinowa niektórych stanów wewnątrz diagramu wagowego.

### 1.3 Reprezentacja dołączona

Z tożsamości Jacobiego:

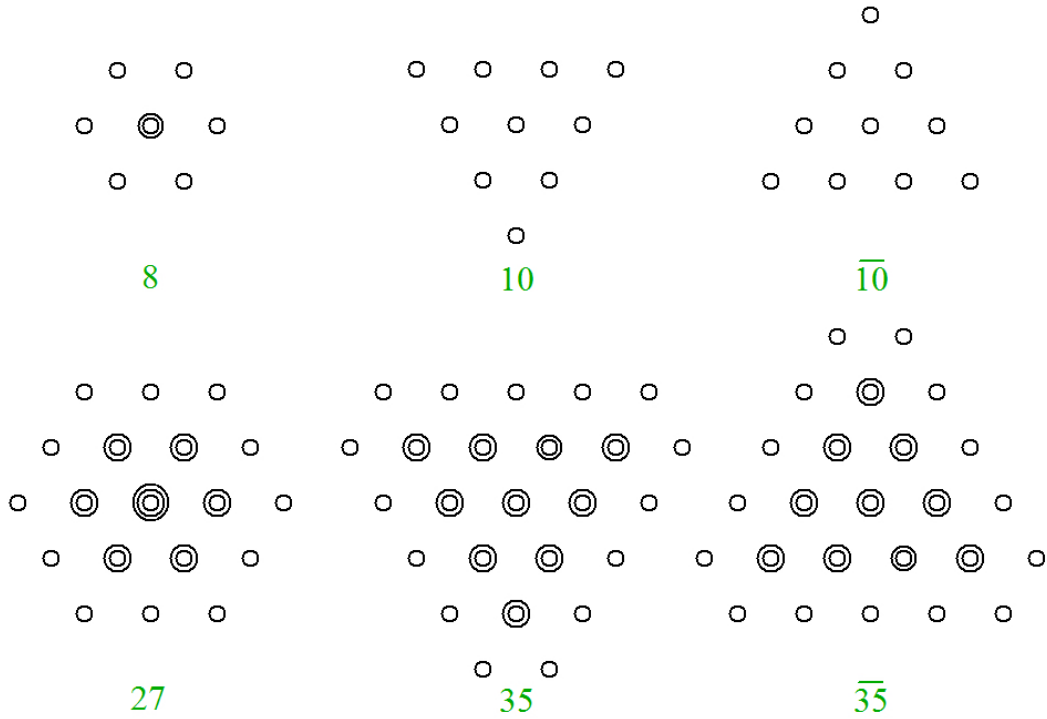
$$[T_m, [T_n, T_l]] + [T_n, [T_l, T_m]] + [T_l, [T_m, T_n]] = 0 \quad (20)$$

wynika, że macierze  $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$

$$(T_m^{\text{adj}})_{ij} = -if_{mij} \quad (21)$$

spełniają reguły komutacji (8). Taką reprezentację nazywa się *reprezentacją dołączoną (adjoint)*. Dla  $SU(2)$  jest to reprezentacja spinu 1, a dla  $SU(3)$  oktet. Ze wzoru (21) wynika, że

$$-T_l^{\text{adj}*} = T_l^{\text{adj}} \quad (22)$$



Rysunek 4: Oktet, dekuplet, antydekuplet i wyższe reprezentacje grupy SU(3).

czyli, że jest to reprezentacja samosprężona. Dlatego w graficznej reprezentacji generatorów na linii falistej, odpowiadającej indeksowi  $m$  nie ma strzałki. Używając uprzednio zdefiniowanej notacji graficznej dla symboli  $if_{mij}$ , relację komutacji

$$\begin{aligned}
 [T_m^{\text{adj}}, T_m^{\text{adj}}]_{ij} &= if_{mnl}(T_l^{\text{adj}})_{ij} \\
 &= (-if_{mik})(-if_{nkj}) - (-if_{nik})(-if_{mkj}) = if_{mnl}(-if_{lij}) \quad (23)
 \end{aligned}$$

można graficznie przedstawić w następujący sposób:

