1 Transformacje Lorentza

Czterowektory

$$x^\mu = (ct, \vec{x}),\ x_\mu = (ct, -\vec{x}) \tag{1}$$

nazywamy odpowiednio czterowektorem *kontrawariantnym* i *kowariantnym.* Transformacje Lorentza zachowują długość czterowektora

$$x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \vec{x}\cdot\vec{x}, \tag{2}$$

którą można zapisać przy pomocy tensora metrycznego

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

jako

$$x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu. \tag{4}$$

Przekształcenia Lorentza zapisujemy w notacji macierzowej

$$x'^{\mu} = L^\mu{}_\nu\, x^\nu \tag{5}$$

gdzie przyjęliśmy notację

$$L^{\text{wiersz}}{}_{\text{kolumna}}. \tag{6}$$

Zatem warunek niezmienniczości iloczynu skalarnego

$$x'^{\mu} g_{\mu\nu} x'^{\nu} = L^\mu{}_\alpha\, x^\alpha g_{\mu\nu} L^\nu{}_\beta\, x^\beta = x^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta \tag{7}$$

sprowadza się do równania

$$L^\mu{}_\alpha\, g_{\mu\nu} L^\nu{}_\beta\, = g_{\alpha\beta} \tag{8}$$

Przestawiając wiersze i kolumny dostajemy macierz transponowaną

$$L^\mu{}_\alpha = \left(L^{\mathrm{T}}\right)_\alpha{}^\mu \tag{9}$$

i równanie (8) przyjmuje postać:

$$\left(L^{\mathrm{T}}\right)_\alpha{}^\mu\, g_{\mu\nu} L^\nu{}_\beta\, = g_{\alpha\beta} \ \text{ lub } \ L^{\mathrm{T}} g L = g. \tag{10}$$

Aby znaleźć parametry transformacji Lorentza, najwygodniej rozpatrzyć przekształecenie infinitenzymalne:

$$L^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu. \tag{11}$$

Przepisując (8) dla przekształcenia (11) z dokładnością do wyrazów liniowych w ε, otrzymujemy:

$$g_{\alpha\beta} + \, g_{\alpha\nu}\varepsilon^\nu{}_\beta\, + \varepsilon^\mu{}_\alpha\, g_{\mu\beta}\, = g_{\alpha\beta}. \tag{12}$$

Definiując

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = g_{\alpha\nu}\varepsilon^{\nu}{}_{\beta} \tag{13}$$

otrzymujemy z (12)

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}, \tag{14}$$

czyli, że czterowymiarowa macierz rzeczywista ε jest antysymetryczna. Taka macierz sparametryzowana jest przez 6 parametrów.

Ogólnie transformację Lorentza mozemy zapisać jako

$$L = e^{\Omega} \tag{15}$$

i rozwijając L z dokładnością do wyrazów liniowych (podobnie jak w (11)) otrzymujemy z (10)

$$e^{\Omega^{\mathrm{T}}} g = g^{-\Omega} \quad \rightarrow \quad \Omega^{\mathrm{T}} g = -g\Omega \tag{16}$$

definiując $\omega = g\Omega$ mamy $\omega^{\mathrm{T}} = \Omega^{\mathrm{T}} g^{\mathrm{T}} = \Omega^{\mathrm{T}} g$ (16) przyjmuje postać analogiczną do (14):

$$\omega^{T} = -\omega. \tag{17}$$

Zatem ω jest macierzą antysymetryczną i zwyczajowo parametryzujemy ją w następujacy sposób:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ -\beta_1 & 0 & \phi_3 & -\phi_2 \\ -\beta_2 & -\phi_3 & 0 & \phi_1 \\ -\beta_3 & \phi_2 & -\phi_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Stąd macierz $\Omega = g\omega$ przyjmuje postać

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \beta_2 & \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ \beta_3 & -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Definiując *generatory* transformacji Lorentza

$$\Omega = -i\,\vec{\beta}\cdot\vec{K} - i\,\vec{\phi}\cdot\vec{J} \tag{20}$$

możemy łatwo odczytać ich jawną postać:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ J_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix},\ J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix},\ J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{21}$$

Można wykazać bezpośrednim rachunkiem, że

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k, \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} K_k, \\ [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk} J_k. \end{aligned} \tag{22}$$

Korzystając z tych relacji można wyprowadzić relacje komutacji dla operatorów

$$J_i^{\pm} = \frac{1}{2}\left(J_i \pm iK_i\right),$$

które przyjmują postać

$$\begin{aligned} \left[J_i^{\pm}, J_j^{\pm}\right] &= i\varepsilon_{ijk} J_k^{\pm}, \\ \left[J_i^{\pm}, J_j^{\mp}\right] &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Wdzimy zatem, że grupa przekształceń Lorentza SO(1,3) jest izomorficzna z iloczynem tensorowym dwóch grup SU(2):

$$\mathrm{SO}(1,3) \simeq \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2). \tag{24}$$

Zatem reprezentacje grupy Lorentza możemy charakteryzować liczbami kwantowymi (s_1, s_2) odpowiadającymi spinowi każdej z grup SU(2).