Wstęp do fizyki cząstek

zestaw 11 i 12

10.05.2016. wtorek, godz. 10:15

sala A-1-08

1. Równanie Diraka ma postać

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\psi. \tag{1}$$

gdzie $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i β są pewnymi macierzami hermitowskimi (dlaczego?). Podnosząc do kwadratu obustronnie operatory działające na funkcję (bispinor) ψ i żądając, żeby wówczas zachodziło równanie Kleina-Gordona

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^{\,2} + m^2c^4\right)\psi$$

wykazać, że macierze $\vec{\alpha}$ i β spełniają nastepujące związki:

$$\begin{aligned}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) &= 2\delta_{ij},\\ (\alpha_i\beta + \beta\alpha_j) &= 0,\\ \beta^2 &= 1.\end{aligned} \tag{2}$$

2. Mnożąc równanie (1) z lewej strony przez β, przepisać je przy pomocy macierzy γ Diraka

$$\gamma^0 = \beta,\ \gamma^i = \beta\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Równanie to możemy więc zapisać w jenostkach naturalnych $c = \hbar = 1$ w formie

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m\right)\psi = 0, \tag{3}$$

gdzie

$$p^\mu = (p^0 = i\partial_t, \vec{p} = -i\vec{\nabla}).$$

Obliczyć antykomutator

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = ?. \tag{4}$$

Wykazać, że

$$\left(\gamma^0\right)^\dagger = \gamma^0,\ \left(\gamma^i\right)^\dagger = -\gamma^k. \tag{5}$$

3. Sprawdzić, że macierze 4×4

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad \gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

gdzie σ^i oznaczają macierze Pauliego spełniają (4).

4. Transformacja Lorentza

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu} \tag{7}$$

zachowuje długość czterowektora $x^2 = x^{\mu} x_{\mu}$. Zakładając, że przy transformacji współrzędnych (7) bispinor Diraka transformuje się w następujący sposób

$$\psi'(x') = S(L)\psi(x)$$

(gdzie S jest macierzą niezależną od współrzędnych) wykazać, że

$$S^{-1}(L)\gamma^{\mu} S(L) = L^{\mu}_{\ \nu}\gamma^{\nu}. \tag{8}$$

5. Przy pomocy macierzy γ Diraka można zdefiniować macierz

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{9}$$

Udowodnić własności:

$$(\gamma_5)^2 = 1,\ \gamma_5^{\dagger} = \gamma_5,\ \{\gamma_5, \gamma^{\mu}\} = 0.$$

Znaleźć jawną postać γ_5 w reprezentacji (6). Udowodnić, że

$$S^{-1}(L)\gamma_5 S(L) = \det(L)\,\gamma_5.$$

W tym celu użyć innej formy γ_5:

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu},$$

gdzie $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ jest całkowicie antysymetrycznym tensorem, takim że $\varepsilon^{0123} = 1$.