Wstęp do fizyki cząstek

zestaw 1 i 2

2.3.2016. środa, godz. 16:00

sala F-1-04

1. Rozpraszanie Comptona. Zakładając, że foton jest relatywistyczną cząstką o zerowej masie, rozważyć rozpraszanie fotonu o długości fali λ_1 na spoczywającym elektronie o masie m. Przyjmując dla fotonu $E = h\nu = hc/\lambda$ oraz korzystając z prawa zachowania pędu i energii w wersji relatywistycznej, wykazać, że długość fali fotonu λ_2 po rozproszeniu pod kątem θ spełnia związek

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\frac{h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

2. Udowodnić tożsamość Jacobiego:

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B] = 0, \tag{1}$$

gdzie A, B i C to dowolne operatory (macierze), a $[\cdot,\cdot]$ oznacza komutator.

3. Dana jest algebra operatorów T_m, gdzie $m, n, l = 1, 2, \ldots N^2 - 1$

$$[T_m, T_n] = if_{mnl}T_l, \tag{2}$$

gdzie stałe f_{mnl} są rzeczywistymi tensorami całkowicie antysymetrycznymi. Wykazać, korzystając z tożsamości Jacobiego, że macierze

$$\left(\tilde{T}_m\right)_{nl} = -if_{mnl}$$

spełaniają regułę komutacji (2).

4. Dla grupy SU(N =2) stałe f są równe tensorowi Levi-Civity:

$$f_{mnl} = \varepsilon_{mnl}. \tag{3}$$

Zapisać operatory $\tilde{T}_m$ jawnie w postaci macierzy 3×3. Oblizcyć sumę ich kwadratów: $\tilde{T}_1^2 + \tilde{T}_2^2 + \tilde{T}_3^2$. Okaże się, że suma ta jest proporcjonalna do 1, a współczynnik proporcjonalności wskazuje, że macierze te opisują spin $j = 1$.

5. Wiemy z mechaniki kwantowej, że generatory obrotu dla $j = 1$ w bazie $|j,m\rangle$ przyjmują postać:

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Sprawdzić, że macierz unitarna

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

transformuje jedne macierze w drugie:

$$J_l = U^\dagger \tilde{T}_l U. \tag{6}$$

Jak transformują się wektory bazowe?

6. Pokazać, że jeżeli spełniona jest relacja (2), to macierze

$$T_l' = -iT_l^*$$

także spełnają (2). Dla grupy SU(2) ($T_l = \tau_l/2$, gdzie τ_l to macierze Pauliego) istnieje unitarna transformcja podobieństwa

$$U\tau_m U^\dagger = -\tau_m^*. \tag{7}$$

Znaleźć U.

WSKAZÓWKA: najlepiej zapisać $U = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}}$, gdzie $\alpha_{1,2,3}$ są parametrami rzeczywistymi. Następnie zastosować wzór analogiczny do wzoru de Moivre'a i rozwiązać równania (7).

7. Macierze Gell-Mann'a, które są dla grupy SU(3) odpowiednikiem macierzy Pauliego przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \\
\lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Generatory grupy SU(3) w reprezentacji fundamentalnej to $T_\alpha = \lambda_a/2$. Obliczyć działanie operatorów

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} T_8, \;\; T_3, \;\; I_\pm = T_1 \pm iT_2, \qquad V_\pm = T_4 \pm iT_5, \qquad \hat{U}_\pm = T_6 \pm iT_7 \tag{9}$$

na stany bazowe:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Jak działają operatory (9) zbudowane z operatorów $-T^*_\alpha$?

http://th-www.if.uj.edu.pl/~michal/