Łamanie lokalnej symetrii SU(2)

$$\Phi \to \Phi' = e^{-i\theta(x)\tau_0} U \Phi \quad \to \quad B_\mu \quad W^3_\mu \quad W^\pm_\mu$$
$$U = e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}}$$

Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{dyn} + \mathcal{L}_\Phi$$

$$\mathcal{L}_{dyn} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{8} \mathrm{Tr}(\boldsymbol{W}_{\mu\nu} \boldsymbol{W}^{\mu\nu}),$$
$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi)$$

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2\right]^2 = \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 - \phi_0^2\right]^2$$

wzbudzenia mają postać

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} h(x) \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 \qquad \longleftarrow \text{ masywne pole skalarne}$$

$$- \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\phi_0^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu$$

$\uparrow$ masywne pole wektorowe

$$- \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \qquad \longleftarrow \text{ bezmasowe pole wektorowe}$$

$\downarrow$ masywne, naładowane pole wektorowe

$$- \frac{1}{2}\left(\Delta_\mu^* W_\nu^- - \Delta_\nu^* W_\mu^-\right)\left(\Delta^\mu W^{+\,\nu} - \Delta^\nu W^{+\,\mu}\right) + \frac{1}{2} g_2^2 \phi_0^2 W_\mu^- W^{+\,\mu}$$

gdzie: $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ oraz pochodna kowariantna

$$\Delta_\mu W_\mu^+ = \left(\partial_\mu + i \underbrace{g_2 \sin\theta_W}_{e} A_\mu\right) W_\mu^+ \qquad \Delta_\mu^* W_\mu^- = \left(\partial_\mu - i \underbrace{g_2 \sin\theta_W}_{e} A_\mu\right) W_\mu^-$$

$$B = A \cos\theta_W - Z \sin\theta_W$$
$$W^3 = Z \cos\theta_W + A \sin\theta_W$$

Jak dołączyć do tego modelu fermiony?

Trzeba skonstruować model dynamiczny sprzęgający pion do leptonu i neutrina, uwzględnić przstrzeń fazową. Ale mamy pierwsze wnioski:

- neutrina są (prawie) bezmasowe
- w oddziaływaniach słabych biorą udział leptony lewoskrętne

Dodatkowo pamietajmy:

$$e = g_2 \sin\theta_W = g_1 \cos\theta_W$$

Teoria Fermiego

Prądy:

$$j_\nu = \overline{\psi}_e \gamma_\nu \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_e + \overline{\psi}_\mu \gamma_\nu \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_\mu + \overline{\psi}_\tau \gamma_\nu \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_\tau$$

oddziaływanie

$$\mathcal{L} = -2\sqrt{2} G_F \, g^{\nu\mu} j_\nu j_\mu^\dagger$$
$$G_F = 1.16639 \times 10^{-5} \ \mathrm{GeV}^{-2}.$$

Pamietajmy (reprezentacja chiralna)

$$\psi_L = P_L \psi = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi$$
$$\psi_R = P_R \psi = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi$$

Leptony w modelu Weinberga-Salama U(1)×SU(2)

Lewe dublety SU(2):

$$L = \begin{bmatrix} L_A \\ L_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

Transformacja SU(2)

$$\begin{aligned} L &\to L' = UL, \\ \Phi &\to \Phi' = U\Phi, \\ U &= e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}} \end{aligned}$$

gdzie U jest tym samym U, które działa na Φ. U miesza różne pola, więc muszą mieć tę samą skrętność, nie mogą mieć masy. Prawoskrętne leptony się nie transformują:

$$\begin{aligned} e_R &\to e'_R = e_R \\ \nu_{eR} &\to \nu'_{eR} = \nu_{eR} \end{aligned}$$

Pochodna kowariantna dla pól lewoskrętnych

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \boldsymbol{W}_\mu \right) \Phi$$

$$\tilde{D}_\mu L = \left(\partial_\mu + i\frac{g'}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \boldsymbol{W}_\mu \right) L$$

Stała g_2 jest taka sama, ale g' trzeba tak dobrać, żeby foton nie sprzęgał się do neutrina:

$$\tilde{D}_\mu L = \begin{bmatrix} \partial_\mu - i\frac{e}{\sin 2\theta_W} Z_\mu & i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} W_\mu^+ \\ i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} W_\mu^- & \partial_\mu - ieA_\mu - ie\cot 2\theta_W Z_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

gdzie

$$g' \cos\theta_W = -g_2 \sin\theta_W = -e$$

Pochodna kowariantna dla pól prawoskrętnych

Neutrino się nie sprzęga. Elektron prawoskretny jest singletem SU(2) więc sprzęga się tylko do pola U(1), tzn pola B_μ

$$\begin{aligned}\breve{D}_\mu e_R &= \left(\partial_\mu + i\frac{g''}{2}B_\mu\right)e_R \\ &= \left(\partial_\mu + i\frac{g''}{2}\left(A_\mu\cos\theta_W - Z_\mu\sin\theta_W\right)\right)e_R\end{aligned}$$

Elektron ma ładunek $-e$, więc

$$\frac{g''}{2}\cos\theta_W = -e \quad \Longrightarrow -\frac{g''}{2}\sin\theta_W = e\tan\theta_W$$

i ostatecznie

$$\breve{D}_\mu e_R = \left(\partial_\mu - ie\,A_\mu + ie\tan\theta_W\,Z_\mu\right)e_R$$

Podsumowując:

$$
\begin{aligned}
g' \cos\theta_W &= -g_2 \sin\theta_W = -e \\
g'' \cos\theta_W &= -2e
\end{aligned}
$$

Ponieważ z sektora Higgsa mamy

$$
e = g_2 \sin\theta_W = g_1 \cos\theta_W
$$

zachodzi

$$
g^{'} = -g_1, \quad g^{''} = -2g_1.
$$

Transformacja cechowania:

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x), \\
A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{1}{g_1}\partial_\mu \alpha(x). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$g^{'} = -g_1, \quad g^{''} = -2g_1.$$

Przypomnijmy sobie transformację dla pól Higgsa:

$$\Phi \to \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x)\, \Phi$$

$$D'_\mu \Phi' = \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} B'_\mu + i\frac{g_2}{2} \boldsymbol{W}'_\mu\right) \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x) D_\mu \Phi$$

Przez analogię mamy (transformacja U(1) ma inne fazy!!!)

$$L \to L' = e^{i\theta(x)} U(x)\, L$$

$$e_R \to e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R$$

a pochodne kowariantne

$$\tilde{D}'_\mu L' = \left(\partial_\mu - i\frac{g_1}{2} B'_\mu + i\frac{g_2}{2} \boldsymbol{W}'_\mu\right) L' = e^{i\theta(x)} U(x) \tilde{D}_\mu L$$

$$\breve{D}'_\mu e'_R = \left(\partial_\mu - i g_1 B'_\mu\right) e'_R = e^{i2\theta(x)} \breve{D}_\mu e_R$$

Lagrangian dla leptonów

Opuszczamy znaczki nad pochodnymi kowariantnymi, rozróżniamy je po polach, na które działają. Mamy reguły transformacji:

$$L \to L' = e^{i\theta(x)} U(x)\, L, \qquad e_R \to e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R$$

$$D_\mu L \to D'_\mu L' = e^{i\theta(x)} U(x) D_\mu L, \qquad D_\mu e_R \to D'_\mu e'_R = e^{i2\theta(x)} D_\mu e_R$$

Zatem niezmienniczy lagragian:

$$\mathcal{L}^e_{dyn} = L^\dagger i\gamma^\mu D_\mu L + e^\dagger_R i\gamma^\mu D_\mu e_R + \nu^\dagger_R i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_R.$$

gdzie

$$D_\mu L = \begin{bmatrix} \partial_\mu - i\frac{e}{\sin 2\theta_W} Z_\mu & i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} W^+_\mu \\ i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} W^-_\mu & \partial_\mu - ieA_\mu - ie\cot 2\theta_W Z_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

$$D_\mu e_R = (\partial_\mu - ie\, A_\mu + ie \tan\theta_W\, Z_\mu)\, e_R$$

Człony masowe

Pamiętamy, że człon masowy ma postać (dagger odnosi sie do SU(2))

$$-m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L)$$

Tu nie da się go tak zapisać, bo pola lewe są dubletami, pola prawe singletami SU(2) i człon masowy nie byłby niezmienniczy. Ale można sprzęgać fermony do pól Higgsa.

Człony masowe

Prawa transformacji U(1)×SU(2):

$$\Phi \to \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x)\,\Phi, \qquad L \to L' = e^{i\theta(x)} U(x)\,L, \quad e_R \to e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R$$

Jakie mogą być człony niezmiennicze (SU(2)×U(1) i lorentzowskie):

$$L^\dagger \Phi \Longrightarrow \quad \text{niezmiennik SU(2), ale dostaje fazę U(1): } e^{-i2\theta(x)}$$

$$\left(L^\dagger \Phi\right) e_R \Longrightarrow \quad \text{niezmiennik SU(2)} \times \text{U(1)}$$

Zatem niezmienniczy lagrangian:

$$\mathcal{L}^e_{int} = -\lambda_e \left\{ \left(L^\dagger \Phi\right) e_R + e^\dagger_R \left(\Phi^\dagger L\right) \right\}$$

$$= -\lambda_e \left\{ \Phi_A \left(\nu^\dagger_{eL} e_R\right) + \Phi_B \left(e^\dagger_L e_R\right) + \Phi^\dagger_A \left(e^\dagger_R \nu_{eL}\right) + \Phi^\dagger_B \left(e^\dagger_R e_L\right) \right\}$$

gdzie użyliśmy

$$L = \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{bmatrix}$$

Stała λ_e zwana sprzężeniem Yukawy jest *całkowicie dowolna*.

Człony masowe

$$\mathcal{L}^e_{int} = -\lambda_e \left\{ \Phi_A \left(\nu^\dagger_{eL} e_R \right) + \Phi_B \left(e^\dagger_L e_R \right) + \Phi^\dagger_A \left(e^\dagger_R \nu_{eL} \right) + \Phi^\dagger_B \left(e^\dagger_R e_L \right) \right\}$$

Ponieważ

$$\Phi_A = 0, \quad \Phi_B = \phi_0 + h(x)/\sqrt{2}$$

otrzymujemy człony masowe:

$$\mathcal{L}^e_{int} = -\lambda_e \phi_0 \left\{ \left(e^\dagger_L e_R \right) + \left(e^\dagger_R e_L \right) \right\} - \frac{\lambda_e \phi_0}{\sqrt{2}} h \left\{ \left(e^\dagger_L e_R \right) + \left(e^\dagger_R e_L \right) \right\}.$$

Masa elektronu

$$m_e = \lambda_e, \quad \text{gdzie} \quad \phi_0 = 180 \text{ GeV}$$

$$\Longrightarrow \lambda_e \sim 10^{-6}$$

Dlaczego?

Arbitralność sprzężeń Yukawy jest problemem w modelu standardowym.

Analogiczną konstrukcję powtarzamy dla μ i dla τ. Mamy

$$\lambda_e \sim 10^{-6}, \quad \lambda_\mu \sim 10^{-3}, \quad \lambda_\tau \sim 10^{-2}$$

Podsumujmy:

- Uniwersalność sprzężeń wynikająca z symetrii U(1)$\times$SU(2)
- Łamanie symetrii U(1)$\times$SU(2) dostarcza masę bozonom pośredniczącym i leptonom
- Złamana jest symetria $L \longleftrightarrow R$
- Prawoskrętne neutrina nie sprzęgają się do niczego
- Sprzężenia Yukawy są arbitralne (nie ma dla nich żadnej symetrii)
- Neutrina są ściśle bezmasowe (dziś obserwujemy oscylacje)
- Symetria – choć złamana – gwarantuje renormalizowalność

Pytanie: czy mechanizm Higgsa jest „realny", czy jest to efektywny opis czegoś bardziej skomplikowanego?

Model oddziaływań elektrosłabych oparty na złamanaj symetrii U(1)$\times$SU(2) nosi nazwę modelu Weinberga-Salama (model standardowy).

Sprzężenie leptonów do bozonów $W^{\pm}$

$$\mathcal{L}_{eW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}[W^+_\mu \underbrace{\left(\nu^\dagger_{eL}\gamma^\mu e_L\right)}_{j_e^{\mu\,\dagger}} + W^-_\mu \underbrace{\left(e^\dagger_L\gamma^\mu\nu_{eL}\right)}_{j_e^\mu}]$$

Ogólnie

$$j^\mu = \left(e^\dagger_L\gamma^\mu\nu_{eL} + \mu^\dagger_L\gamma^\mu\nu_{\mu L} + \tau^\dagger_L\tilde{\gamma}^\mu\nu_{\tau L}\right)$$

$$\mathcal{L}_{lW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\left[j^{\mu\,\dagger}W^+_\mu + j^\mu W^-_\mu\right]$$

Sprzężenie leptonów do bozonów Z

Definiuje się prąd neutralny:

$$j^{\mu}_{e\,\mathrm{neutral}} = \left(\nu^{\dagger}_{eL}\gamma^{\mu}\nu_{eL}\right) - \cos 2\theta_W \left(e^{\dagger}_{L}\gamma^{\mu}e_{L}\right) + 2\sin^2\theta_W \left(e^{\dagger}_{R}\gamma^{\mu}e_{R}\right)$$

i podobnie dla innych leptonów. Wtedy

$$\mathcal{L}_{lZ} = -\frac{e}{\sin 2\theta_W} Z_{\nu} \left[j^{\nu}_{e\,\mathrm{neutral}} + j^{\nu}_{\mu\,\mathrm{neutral}} + j^{\nu}_{\tau\,\mathrm{neutral}} \right]$$

Jest różnica między lewym a prawym sprzężeniem Z:

$$\begin{aligned} g_L &= -\cos 2\theta_W = -\sin^2\theta_W + \cos^2\theta_W + \left\{\sin^2\theta_W - \sin^2\theta_W\right\} \\ &= 1 - 2\sin^2\theta_W = 0.537\ (0.555) \\ g_R &= 2\sin^2\theta_W = 0.463\ (0.445) \end{aligned}$$

dla $\sin^2\theta_W = 0.2315\ (0.2226)$.

Zachowanie liczby leptonowej

Dodatkowa symetria globalna

$$L_e \to e^{i\alpha} L_e, \; e_R \to e^{i\alpha} e_R$$

Lagrangian

$$\mathcal{L}^e_{dyn} = L_e^\dagger i\gamma^\mu D_\mu L_e + e_R^\dagger i\gamma^\mu D_\mu e_R + \nu_{eR}^\dagger i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eR}$$

jest niezmienniczy. Uzmienniając

$$\alpha \to \alpha + \delta\alpha(x)$$

i żądając

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= i \int d^4x \left[L_e^\dagger \gamma^\mu L_e + e_R^\dagger i\gamma^\mu e_R \right] \partial_\mu \delta\alpha(x) \\ &= -i \int d^4x \partial_\mu \left[L_e^\dagger \gamma^\mu L_e + e_R^\dagger \gamma^\mu e_R \right] \delta\alpha(x). \end{aligned}$$

Mamy zachowany prąd

$$J_e^\mu = L_e^\dagger \gamma^\mu L_e + e_R^\dagger \gamma^\mu e_R$$

gdzie

$$\partial_\mu J_e^\mu = \frac{\partial J_e^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \int d^4x J_e^0 = 0$$

Analogicznie dla μ oraz τ.

Kwarki w modelu standardowym

Rozpad β:

$$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$$

na poziomie kwarków

$$\begin{pmatrix} u \\ \boldsymbol{d} \\ d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ \boldsymbol{u} \\ d \end{pmatrix} + e^- + \overline{\nu}_e.$$

Rozpad mionu

$$\mu \to \nu_\mu + e^- + \overline{\nu}_e$$

zachodzi przez sprzężenie do W:

$$D_\mu L_{(\mu)} = \quad \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{bmatrix} \quad \to \quad D_\mu L_{(q)} = \quad \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix}$$

sugeruje

$$L_{(q)} = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} \; - \; \text{dublet SU}(2)$$

oraz

$$u_R,\ d_R \; - \; \text{singlety SU}(2)$$

Pamiętajmy, że ładunki kwarków są:

$$q_{\text{up}} = +\frac{2}{3} \text{ dla u, c, t} \qquad q_{\text{down}} = -\frac{1}{3} \text{ dla d, s, b}$$

Transformacja cechowania:

$$\begin{aligned} \psi(x) \; &\rightarrow \; \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x), \\ A'_\mu(x) \; &= \; A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Reguły transformacji:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x)\,\Phi \qquad L_{(q)} \rightarrow L'_{(q)} = e^{-i\theta(x)/3} U(x)\, L_{(q)}$$

Dlatego, dla pierwszej generacji:

$$D_\mu L_{(q)} = \begin{bmatrix} \partial_\mu + i\frac{g_1}{6}B_\mu + i\frac{g_2}{2}W^3_\mu & i\frac{g_2}{2}\sqrt{2}W^+_\mu \\ i\frac{g_2}{2}\sqrt{2}W^-_\mu & \partial_\mu + i\frac{g_1}{6}B_\mu - i\frac{g_2}{2}W^3_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix}$$

Pamiętając

$$B = A\cos\theta_W - Z\sin\theta_W, \quad W^3 = Z\cos\theta_W + A\sin\theta_W$$

$$e = g_2\sin\theta_W = g_1\cos\theta_W$$

mamy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{g_1}{3}B + g_2W^3\right) &= \frac{g_1}{6}\left(A\cos\theta_W - Z\sin\theta_W\right) + \frac{g_2}{2}\left(Z\cos\theta_W + A\sin\theta_W\right)\\ &= \frac{1}{6}A\left(g_1\cos\theta_W + 3g_2\sin\theta_W\right) + \ldots = \frac{2e}{3}A + \ldots\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{g_1}{3}B - g_2W^3\right) &= \frac{g_1}{6}\left(A\cos\theta_W - Z\sin\theta_W\right) - \frac{g_2}{2}\left(Z\cos\theta_W + A\sin\theta_W\right)\\ &= \frac{1}{6}A\left(g_1\cos\theta_W - 3g_2\sin\theta_W\right) + \ldots = -\frac{e}{3}A + \ldots\end{aligned}$$

Reguły transformacji:

$$\Phi \to \Phi' = e^{-i\theta(x)} U\left(x\right) \Phi$$

$$L_{(q)} \to L'_{(q)} = e^{-i\theta(x)/3} U(x)\, L_{(q)}$$

$$u_R \to u'_R = e^{-i4\theta(x)/3}\, u_R$$

$$d_R \to d'_R = e^{+i2\theta(x)/3}\, d_R$$

Masy kwarków down

Konstrukcja oparta na analogii

$$d \leftrightarrow \text{leptony} \qquad u \leftrightarrow \text{neutrina}$$

Można skopiować człon masowy z sektora leptonowego i kwarki d dostaną masę, a kwarki u zostaną bezmasowe:

$$L = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x)/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

i

$$\mathcal{L}_{d\,\mathrm{Higgs}} = -\sum_{k=d,s,b} \left[\lambda_k^d \left(L_k^\dagger \Phi \right) d_{_kR} + \lambda_k^{d\,*}\, d^\dagger_{_kR} (\Phi^\dagger L_k) \right]$$

$$\to -\phi_0 \sum_{k=d,s,b} \left[\lambda_k^d\, d^\dagger_{_kL} d_{_kR} + \lambda_k^{d\,*}\, d^\dagger_{_kR} d_{_kL} \right] \qquad \text{człon masowy}$$

Masy kwarków up

Jak wprowadzić masę dla kwarków u_i?

$$L = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} \rightarrow L_1 = \begin{bmatrix} d_L \\ u_L \end{bmatrix}$$

i powtórzyć ten sam schemat. Musimy zadbać o transformację SU(2)!!!!

Tensor Levi-Civity

$$\varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon^2 = -\mathbf{1}, \qquad \varepsilon\varepsilon^T = 1$$

Mamy (uwaga na znak minus!):

$$L_\varepsilon = \varepsilon L = \begin{bmatrix} d_L \\ -u_L \end{bmatrix}$$

Jak to się transformuje? Skorzystamy z tożsamości

$$U^T \varepsilon U = \varepsilon \det U = \varepsilon.$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} U^T \varepsilon U &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} & u_{22} \\ -u_{11} & -u_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12} \\ u_{21}u_{12} - u_{11}u_{22} & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon \det U \end{aligned}$$

Masy kwarków up

Zatem człon niezmienniczy względem SU(2):

$$u_R^\dagger \left(\Phi^T \varepsilon L\right)$$

To jest też niezmiennicze ze względu na U(1):

$$\Phi \to \Phi' = e^{-i\theta} U\ \Phi, \quad L \to L' = e^{-i\theta/3} U\ L, \quad u_R \to u_R' = e^{-i4\theta/3}\, u_R.$$

Zatem (uwaga na znak minus!)

$$\mathcal{L}_{u\,\mathrm{Higgs}} = -\sum_{k=u,c,t} \left[\lambda_k^u \left(L_k^\dagger \varepsilon \Phi^*\right) u_{kR} - \lambda_k^{u\,*}\, u_{kR}^\dagger (\Phi^T \varepsilon L_j)\right]$$

$$\to -\phi_0 \sum_{k=u,c,t} \left[\lambda_k^u\, u_{jL}^\dagger u_{kR} + \lambda_k^{u\,*}\, u_{kR}^\dagger u_{jL}\right] \qquad \text{człon masowy}$$

Uogólnienia członu masowego

Prawa transformacji U(1)×SU(2):

$$\Phi \to \Phi' = e^{-i\theta} U \; \Phi, \quad L \to L' = e^{-i\theta/3} U \; L, \quad u_R \to u'_R = e^{-i4\theta/3} \, u_R.$$

Dla kwarków *down* mieliśmy

$$\mathcal{L}_{mass} = - \sum_{k=d,s,b} \lambda_k \left[\left(L_k^\dagger \Phi \right) r_k + r_k^\dagger (\Phi^\dagger L_k) \right]$$

Można zamiast stałych Yukawy λ_k wprowadzić macierze 3×3:

$$\mathcal{L}_{mass} = - \sum_{j,k=d,s,b} \left[\lambda_{jk} \left(L_j^\dagger \Phi \right) r_k + \lambda_{jk}^* \, r_k^\dagger (\Phi^\dagger L_j) \right].$$

Dowolną macierz kwadratową można zdiagonalizować przy pomocy transformacji biunitarnej

$$\lambda = U_L^\dagger \lambda^D U_R$$

gdzie

$$\lambda_{jk}^D = \lambda_k \, \delta_{jk}$$

Uogólnienia członu masowego

Zamiast stałych Yukawy λ_k mamy macierze ($k = e,\ \mu,\ \tau$):

$$\mathcal{L}_{mass} = -\sum_{j,k=d,s,b} \left[\lambda_{jk}\left(L_j^\dagger \Phi\right) r_k + \lambda_{jk}^* r_k^\dagger (\Phi^\dagger L_j)\right].$$

Mamy

$$\lambda_{jk} = \left(U_L^\dagger\right)_{jm} \lambda_m \left(U_R\right)_{mk}$$

i dalej

$$\mathcal{L}_{mass} = -\sum_{j,k=d,s,b} \lambda_m \left[\left(\left(U_L L\right)_m^\dagger \Phi\right)\left(U_R r\right)_m + \left(U_R r\right)_m^\dagger \left(\Phi^\dagger \left(U_L L\right)_m\right)\right]$$

Nowe pola

$$L' = U_L L,\ r' = U_R r$$

$\mathcal{L}_{mass}$ jest diagonalny.
Inne człony są nieczułe; są typu $L^\dagger \ldots L$ lub $r^\dagger \ldots r$, bo:

$$L' = U_L L, \; r' = U_R r$$

Macierze U_L i U_R są jednoznaczne z dokładnością do faz:

$$\begin{bmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3} \end{bmatrix}$$

prowadzących do zachowania liczby elektronowej, mionowej i tauowej.

Masy kwarków up i down

Zatem człony masowe

$$\mathcal{L}_{q\,\mathrm{mass}} = -\phi_0 \sum_{j,k=d,s,b} \left[\Lambda^{d}_{jk}\, d^{\dagger}_{jL} d_{kR} + \Lambda^{d\,*}_{jk}\, d^{\dagger}_{kR} d_{jL}\right] - \phi_0 \sum_{j,k=u,c,t} \left[\Lambda^{u}_{jk}\, u^{\dagger}_{jL} u_{kR} + \Lambda^{u\,*}_{jk}\, u^{\dagger}_{kR} u_{jL}\right].$$

Macierze Λ^d oraz Λ^u można zdiagonalizować (nawet trzeba):

$$\phi_0 \Lambda^{d}_{jk} = D^{\dagger}_{L} M^{d} D_{R}, \quad \phi_0 \Lambda^{u}_{jk} = U^{\dagger}_{L} M^{u} U_{R},$$

gdzie

$$M^d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{bmatrix}, \quad M^u = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{bmatrix}.$$

Diagonalizacja macierzy mas

Definiujemy nowe pola

$$d'_{jL} = (D_L)_{jk}\, d_{kL}, \quad d'_{jR} = (D_R)_{jk}\, d_{kR},$$
$$u'_{jL} = (U_L)_{jk}\, u_{kL}, \quad u'_{jR} = (U_R)_{jk}\, u_{kR},$$

dla których człon masowy jest diagonalny (opuściliśmy primy):

$$\mathcal{L}_{q\,\mathrm{mass}} = -\sum_{j=d,s,b} \left[m_j^d \left(d^\dagger_{jL} d_{jR} + d^\dagger_{jR} d_{jL} \right) \right] - \sum_{j=u,c,t} \left[m_j^u \left(u^\dagger_{jL} u_{kR} + u^\dagger_{jR} u_{jL} \right) \right].$$

Jak taka transformacja odbija się na oddziaływaniach?

Oddziaływanie W z kwarkami

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\sum_k \left[\left(u^\dagger_{kL}\gamma^\mu d_{kL}\right)W^+_\mu + \left(d^\dagger_{kL}\gamma^\mu u_{kL}\right)W^-_\mu\right]$$

gdzie

$$\left(D^\dagger_L\right)_{kj} d'_{jL} = d_{kL}, \quad \left(U^\dagger_L\right)_{ki} u'_{iL} = u_{kL}$$

i w konsekwencji

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\sum [\underbrace{(U_L)_{ik}\left(D^\dagger_L\right)_{kj}}_{V_{ij}}\left(u'^\dagger_{iL}\gamma^\mu d'_{jL}\right)W^+_\mu + \underbrace{(D_L)_{jk}\left(U^\dagger_L\right)_{ki}}_{V^\dagger_{ij}}\left(d'^\dagger_{jL}\gamma^\mu u'_{iL}\right)W^-_\mu]$$

Opuszczając primy:

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\sum \left[V_{ij}\left(u^\dagger_{iL}\gamma^\mu d_{jL}\right)W^+_\mu + V^\dagger_{ij}\left(d^\dagger_{iL}\gamma^\mu u_{jL}\right)W^-_\mu\right]$$

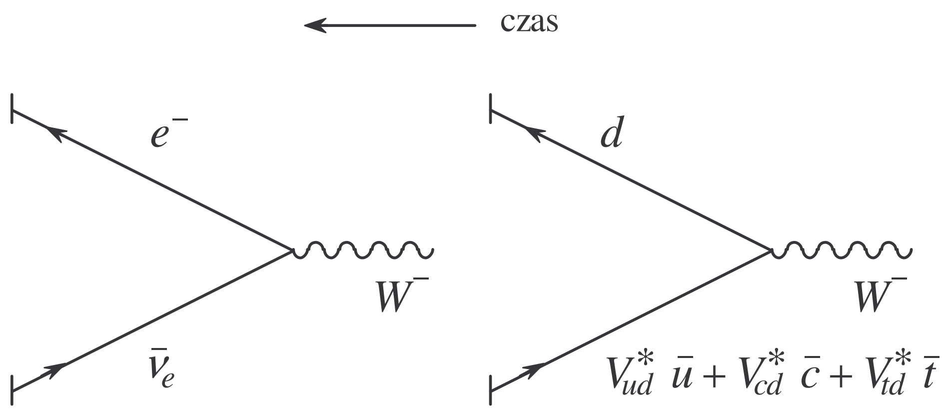
Macierz Kobayashi-Maskawy

Inny zapis:

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\sum\left[V_{ij}\left(u^\dagger_{iL}\gamma^\mu d_{jL}\right)W^+_\mu + V^\dagger_{ij}\left(d^\dagger_{iL}\gamma^\mu u_{jL}\right)W^-_\mu\right]$$

ma postać

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\left[u^\dagger_L, c^\dagger_L, t^\dagger_L\right]\begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb}\end{bmatrix}\gamma^\mu\begin{bmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L\end{bmatrix} W^\dagger_\mu + \text{ h.c.}$$



Oddziaływania słabe są niediagonalne w bazie flavorowej.

Macierz Kobayashi-Maskawy

Macierz Kobayashi-Maskawy jest macierzą unitarną 3×3 (nie specjalną, wyznacznik nie musi być 1). Taka macierz ma $n^2=9$ swobodnych parametrów rzeczywistych. Jednak wiemy, że macierze U_L i D_L są wyznaczone z dokładnością to trzech faz każda:

$$U_L \to \begin{bmatrix} e^{i\alpha_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_t} \end{bmatrix} U_L,\ D_L \to \begin{bmatrix} e^{i\beta_d} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta_b} \end{bmatrix} D_L$$

taka transformacja zamienia

$$V_{ij} = \left(U_L D_L^\dagger\right)_{ij} \to e^{i\left(\alpha_i-\beta_j\right)} V_{ij}.$$

Liczba stopni swobody

Załóżmy, że mamy nie 3 generacje a n. Unitarna macierz zespolona $n \times n$ ma n^2 rzeczywistych stopni swobody.
Z kolei macierz ortogonalna $n \times n$ zależy od $n(n-1)/2$ rzeczywistych kątów:

$$
\begin{aligned}
U &\to n^2 \\
O &\to \frac{1}{2} n(n-1) \\
\text{różnica} &\to \frac{1}{2} n(n+1)
\end{aligned}
$$

Zatem macierz unitarna $n \times n$ ma $n(n+1)/2$ faz.
W naszym przypadku mamy $2n$ faz pól kwarkowych (n lewych i n prawych) ale ponieważ do elementów macierzy V wchodzą tylko różnice $\alpha_i - \beta_j$, pozwala to na wyeliminowanie $2n-1$ faz. Zostaje nastepująca liczba faz:

$$\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) - (2n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{2}{2} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Liczba stopni swobody

Zatem macierz V ma

$$\text{parametrów rzeczywistych: } \frac{1}{2}n(n-1) \to [\mathrm{U}(2)=1,\ \mathrm{U}(3)=3]$$

$$\text{faz: } \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \to [\mathrm{U}(2)=0,\ \mathrm{U}(3)=1]$$

W teorii z dwoma generacjami mamy jeden kąt mieszania.
W teorii z trzema generacjami mamy 3 kąty i jedną fazę.
Faza daje przyczynek do łamania $\mathcal{CP}$.

Parametryzacje macierzy Cabbibo-Kobayashi-Maskawy (CKM)

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$s_{ij} = \sin\theta_{ij}, \ c_{ij} = \cos\theta_{ij}$$

Mamy 3 kąty: $\theta_{12}, \ \theta_{13}, \ \theta_{23}$ oraz jedną fazę δ.

Wartości numeryczne macierzy CKM

$$|V_{\mathrm{CKM}}| = \begin{bmatrix} \mathbf{0.973}\underline{83} & \mathbf{0.22}\underline{72} & \mathbf{0.0039}\underline{6} \\ \mathbf{0.22}\underline{71} & \mathbf{0.972}\underline{96} & \mathbf{0.042}\underline{21} \\ \mathbf{0.008}\underline{14} & \mathbf{0.041}\underline{61} & \mathbf{0.9991}\underline{00} \end{bmatrix}$$

Parametryzacja Wolfensteina: cztery parametry $\lambda = \sin\theta_{12}$, ρ, η oraz A:

$$V_{CKM}^{\mathrm{Wolfenstein}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{bmatrix} + O(\lambda^4)$$

Ta parametryzacja wynika z unitarności.

Unitarity triangle

$$V_{\text{CKM}}^{\dagger} V_{\text{CKM}} =$$

$$\begin{bmatrix} V_{ud}^* & V_{cd}^* & V_{td}^* \\ V_{us}^* & V_{cs}^* & V_{ts}^* \\ V_{ub}^* & V_{cb}^* & V_{tb}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{ud}^* V_{ub} + V_{cd}^* V_{cb} + V_{td}^* V_{tb} = \mathbf{0}$$

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = \mathbf{0}$$

Mamy

$$1 + \frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} + \frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} = \mathbf{0}$$

Suma trzech liczb zespolonych jest równa zero – trójkąt unitarny.

Unitarity triangle

$$1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = \mathbf{0}$$

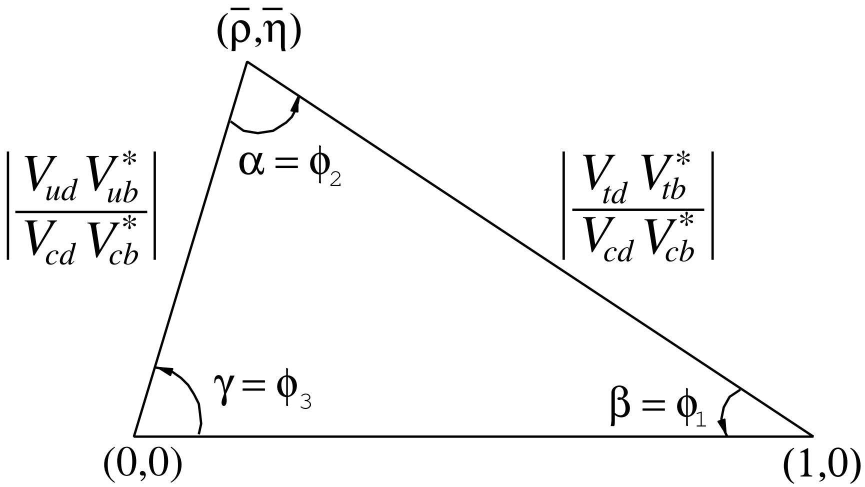
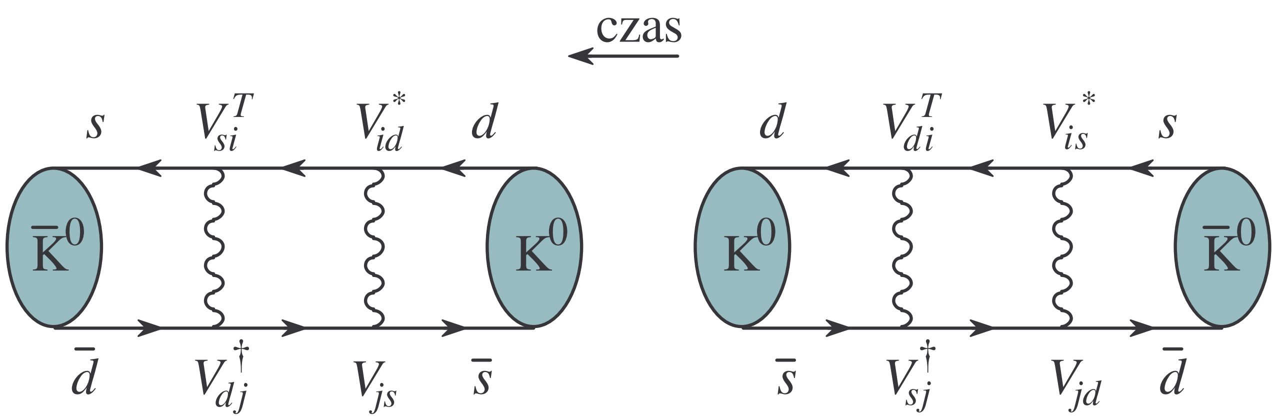


Figure 11.1: Sketch of the unitarity triangle.

Mieszanie mezonów K^0



Mamy

$$-q^2 = \left\langle \overline{K}^0 \left| H_{\text{weak}} \right| K^0 \right\rangle \sim \sum_{i,j} \ldots V_{id}^* V_{jd}^* V_{is} V_{js}$$

$$-p^2 = \left\langle K^0 \left| H_{\text{weak}} \right| \overline{K}^0 \right\rangle \sim \sum_{i,j} \ldots V_{id} V_{jd} V_{is}^* V_{js}^*$$

Dla mezonów B należy zastąpić $s \to b$. Okazuje się, że dominuje mieszanie przez kwark t:

$$\left\langle \overline{B}^0 \left| H_{\text{weak}} \right| B^0 \right\rangle \sim (V_{td}^* V_{ts})^2 \qquad \left\langle B^0 \left| H_{\text{weak}} \right| \overline{B}^0 \right\rangle \sim (V_{td} V_{ts}^*)^2$$

Mieszanie daje poprawki do różnicy mas i do czasów życia.

Opis fenomenologiczny ewolucji czasowej cząstki (stanu) $|P\rangle$:

$$i\frac{d}{dt}\,|P\rangle = \left(M - \frac{i}{2}\Gamma\right)|P\rangle$$

co daje$|P(t)\rangle = |P(0)\rangle\ e^{-iMt-\frac{1}{2}\Gamma t}$.
Ewolucja z mieszaniem (p i q liczby zespolone, $p \neq q$):

$$i\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \left|K^0\right\rangle \\ |\overline{K}^0\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M - \frac{i}{2}\Gamma & -p^2 \\ -q^2 & M - \frac{i}{2}\Gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left|K^0\right\rangle \\ |\overline{K}^0\rangle \end{bmatrix}$$

Stany własne

$$|K_S\rangle \ \sim\ p\left|K^0\right\rangle + q|\overline{K}^0\rangle\,, \quad \lambda_S = M - \frac{i}{2}\Gamma - pq$$
$$|K_L\rangle \ \sim\ p\left|K^0\right\rangle - q|\overline{K}^0\rangle\,, \quad \lambda_L = M - \frac{i}{2}\Gamma + pq$$

Uwaga: pq daje wkład do masy i do szerokości rozpadu.

$$\tau_S = 8.9\times10^{-11}\mathrm{s},\quad \tau_L = 5.17\times10^{-8}\mathrm{s},\quad \Delta M = 3\times10^{-12}\mathrm{MeV}.$$

Ponieważ

$$CP\left|K^0\right\rangle = |\overline{K}^0\rangle, \quad CP|\overline{K}^0\rangle = \left|K^0\right\rangle$$

stany $|K_S\rangle$ i $|K_L\rangle$ nie są stanami własnymi CP. Miara łamania CP

$$\frac{p}{q} = 1 + 2\varepsilon, \quad |\varepsilon| = 2.3 \times 10^{-3}.$$

Łamanie CPT

$$M_{K^0} - \frac{i}{2}\Gamma_{K^0} \neq M_{\overline{K^0}} - \frac{i}{2}\Gamma_{\overline{K^0}}.$$