

1 Grupa SU(3) i klasyfikacja cząstek

Można zapytać, dlaczego w przypadku grupy SU(2) (a więc spinu), nie musieliśmy wprowadzać pojęcia reprezentacji sprzężonej. Wiąże się to z tym, że dla macierzy Pauliego istnieje macierz U taka, że

$$U\tau_m U^\dagger = -\tau_m^*, \quad (1)$$

czyli, że reprezentacja $s = 1/2$ i reprezentacja sprzężona do niej są unitarnie równoważne. Ta własność nie zachodzi dla grup SU(N) przy $N > 2$. Stąd w notacji graficznej użyliśmy strzałki do oznaczenia generatorów w reprezentacji $\mathbf{3}$. Strzałka w przeciwną stronę oznacza reprezentację $\bar{\mathbf{3}}$. Ponadto, jak się przekonamy, istnieją także reprezentacje o tym samym wymiarze, które są różne i nie są wzajemnie sprzężone.

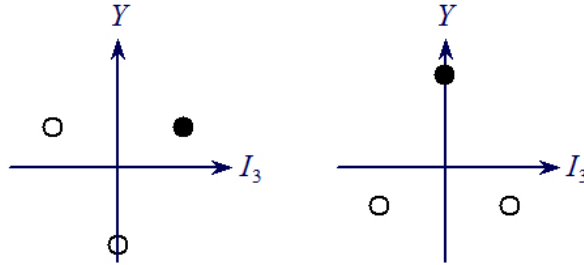
Dla grupy SU(2) relacja (12) sprowadza się do trzech równań:

$$\begin{aligned} \{U, \tau_{1,3}\} &= 0, \\ [U, \tau_2] &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Widzimy, że równania (13) implikują, że $U \sim \tau_2$. Macierz Pauliego τ_2 nie jest unitarna, ale $i\tau_2$ już tak. Równania SU(3) analogiczne do (13) nie mają rozwiązania gdyż w iloczynie macierzy Gell-Manna pojawia się dodatkowa struktura symetryczna:

$$\lambda_m \lambda_n = \frac{2}{3} \delta_{mn} \mathbf{1} + i f_{mnl} \lambda_l + d_{mnl} \lambda_l. \quad (3)$$

Stany (10) i (11) wygodnie jest narysować jako punkty na płaszczyźnie (I_3, Y) , tak jak to pokazano na Rys. 1.



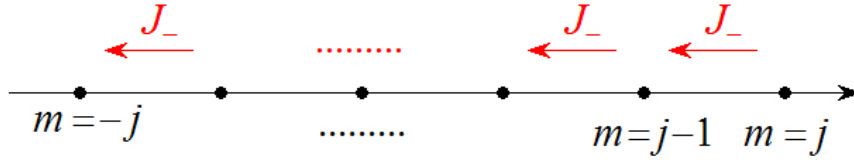
Rysunek 1: Reprezentacja trypletowa i antytrypletowa grupy SU(3).

Diagramy, takie jak te pokazane na rysunku 1, nazywamy *diagramami wagowymi*.

Dla grupy SU(2) konstruujemy operatory J_\pm

$$J_\pm = J_1 \pm i J_2, \quad J_\pm |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle. \quad (4)$$

Stany bazowe danej reprezentacji konstruujemy wybierając stan anihilowany przez J_+ , a więc $|j, j\rangle$ i następnie działamy operatorem J_- tyle razy, aż dostaniemy 0, tak jak to pokazano na Rys. 2.

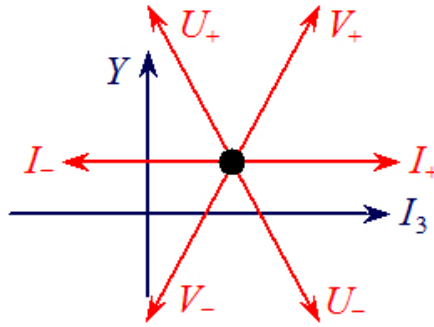


Rysunek 2: Działanie operatora J_- na diagramie wagowym grupy $SU(2)$. Stan $|j, j\rangle$ anihilowany przez J_+ nazywamy najwyższą wagą.

Patrząc na diagramy wagowe reprezentacji $\mathbf{3}$ oraz $\bar{\mathbf{3}}$ pokazane na rysunku 1 widzimy, że potrzebujemy więcej operatorów typu J_{\pm} , aby skonstruować wszystkie stany tych reprezentacji. Rzeczywiście dla grupy $SU(3)$ definiujemy sześć takich operatorów:

$$I_{\pm} = T_1 \pm iT_2, \quad V_{\pm} = T_4 \pm iT_5, \quad \hat{U}_{\pm} = T_6 \pm iT_7. \quad (5)$$

Ich działanie jest schematycznie pokazane na rysunku 3. Stan anihilowany przez I_+ , V_+ oraz U_+ nazywamy najwyższą wagą. Na Rys. 1 stany te zostały oznaczone czarną kropką.



Rysunek 3: Działanie operatorów I_{\pm} , V_{\pm} i U_{\pm} na diagramie wagowym grupy $SU(3)$.

Patrząc na Rys. 1 widzimy, że operatory I_{\pm} nie zmieniają Y (są to generatory podgrupy $SU(2)$), natomiast zmieniają I_3 o ± 1 . Z kolei operatory V_{\pm} oraz U_{\pm} zmieniają Y o ± 1 , a także I_3 o $\pm 1/2$:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\pm} |\mathcal{R}, Y, I, I_3\rangle &= \alpha_{\hat{V}}^{\pm} |\mathcal{R}, Y \pm 1, I + 1/2, I_3 \pm 1/2\rangle + \beta_{\hat{V}}^{\pm} |\mathcal{R}, Y \pm 1, I - 1/2, I_3 \pm 1/2\rangle, \\ \hat{U}_{\pm} |\mathcal{R}, Y, I, I_3\rangle &= \alpha_{\hat{U}}^{\pm} |\mathcal{R}, Y \pm 1, I + 1/2, I_3 \mp 1/2\rangle + \beta_{\hat{U}}^{\pm} |\mathcal{R}, Y \pm 1, I - 1/2, I_3 \mp 1/2\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Wartości stałych α i β podane są w dodatku, \mathcal{R} jest etykietą numerującą daną reprezentację.

Reprezentacje grupy $SU(3)$ jednoznacznie da się „nazwać” przy pomocy pary liczb $\mathcal{R} = (p, q)$, gdzie $p, q = 0, 1, 2, \dots$. Najwyższa waga reprezentacji (p, q) to stan:

$$\left| (p, q) \text{ najwyższa waga} \right\rangle = \left| (p, q), Y = \frac{p+2q}{3}, I = \frac{p}{2}, I_3 = \frac{p}{2} \right\rangle. \quad (7)$$

Znane są także wzory na wymiar

$$\dim(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2), \quad (8)$$

i wartość operatora Casimira

$$C_2(p, q) = \mathbf{T}^2 = p + q + \frac{1}{3}(p^2 + q^2 + pq). \quad (9)$$

Łatwo się przekonać, że reprezentacje pokazane na Rys. 1 to

$$\mathbf{3} = (1, 0), \quad \bar{\mathbf{3}} = (0, 1). \quad (10)$$

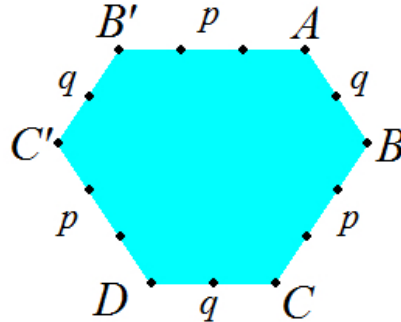
Zwyczajowo używa się obu zapisów na oznakowanie reprezentacji: wymiaru \mathbf{w} i $\bar{\mathbf{w}}$ (czasami \mathbf{w}^*) lub (p, q) .

Zauważmy, że ogólnie

$$\overline{(p, q)} = (q, p).$$

Zatem, jeżeli $p = q$ reprezentacja jest *samosprzeżona*.

Aby skonstruować diagram wagowy reprezentacji (p, q) postępujemy w następujący sposób. Na płaszczyźnie (I_3, Y) zaznaczamy punkt A o współrzędnych najwyższej wagi (18). Następnie rysujemy q punktów w kierunku U_- . Ostatni z nich oznaczamy jako B . Od punktu B w kierunku V_- rysujemy p punktów – ostatni to C . I wreszcie poczynając od C rysujemy q punktów w kierunku I_- (D). Wracamy do A i w kierunku I_- rysujemy p punktów (B'), dalej q punktów w kierunku V_- (C') i w końcu p punktów w kierunku U_- . W ten sposób trafiamy do punktu D . W ten sposób powstaje obwódca diagramu wagowego, która pokazana jest na rysunku 4.

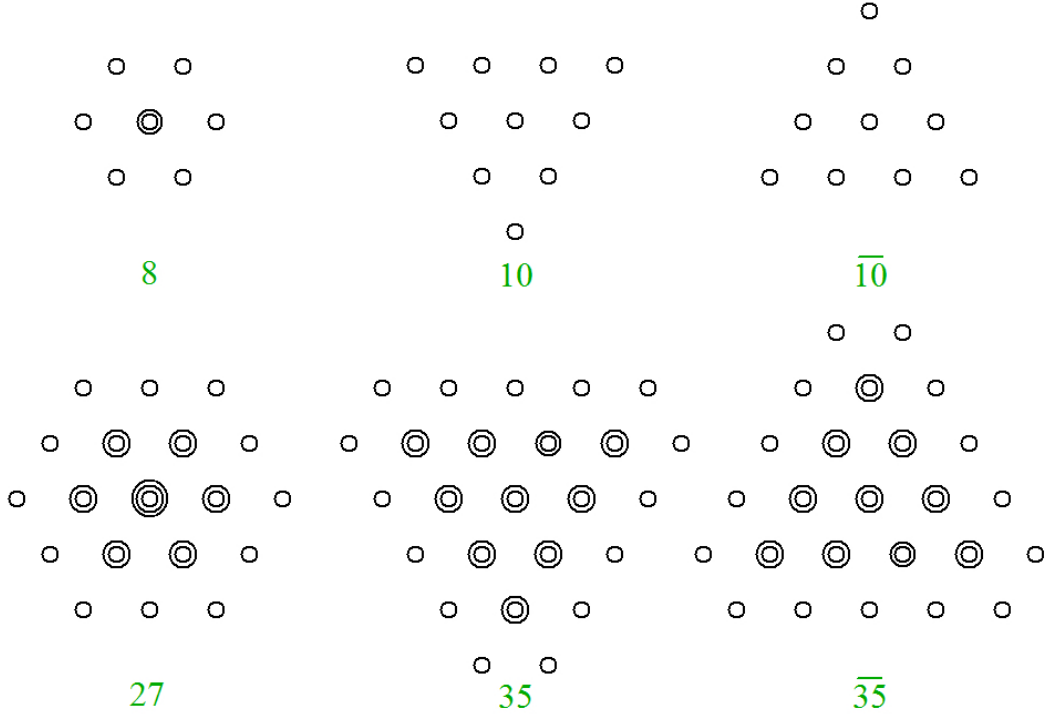


Rysunek 4: Obwódca diagramu wagowego reprezentacji (p, q) . Liczby p oraz q oznaczają liczbę kroków (odcinków) wzdłuż danej krawędzi. Liczba punktów wzdłuż takiej krawędzi jest o jeden większa.

Tak powstały diagram wypełniamy punktami wewnątrz obwódni zaczynając od punktów wzdłuż łamanej $A - B - C$ i posuwając się w kierunku I_- co jeden. Następnie na wewnętrznych „szczeblach” (z pominięciem $A - B'$ oraz $C - D$) diagramu dodajemy punkty

zdegenerowane o izospinie o 1 mniejszym niż szczebel oryginalny. Tak postępujemy, aż wyczerpią się możliwości dodawania punktów.

Na rysunku 5 pokazane są diagramy wagowe reprezentacji $\mathbf{8} = (1, 1)$, $\mathbf{10} = (3, 0)$ i $\overline{\mathbf{10}} = (0, 3)$, które odgrywają istotną rolę w klasyfikacji cząstek. Pokazano także wyższe reprezentacje, gdzie występuje kilkakrotna degeneracja izospinowa niektórych stanów wewnątrz diagramu wagowego.



Rysunek 5: Oktet, deкуплет, antydeкуплет i wyższe reprezentacje grupy SU(3).

1.1 Reprezentacja dołączona

Z tożsamości Jacobiego:

$$[T_m, [T_n, T_l]] + [T_n, [T_l, T_m]] + [T_l, [T_m, T_n]] = 0 \quad (11)$$

wynika, że macierze $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$

$$\left(T_l^{\text{adj}}\right)_{ab} = -if_{lab} \quad (12)$$

spełniają reguły komutacji (8). Taką reprezentację nazywa się *reprezentacją dołączoną (adjoint)*. Dla SU(2) jest to reprezentacja spinu 1, a dla SU(3) oktet. Ze wzoru (23) wynika, że

$$-T_l^{\text{adj}*} = T_l^{\text{adj}} \quad (13)$$

czyli, że jest to reprezentacja samosprężona. Dlatego w graficznej reprezentacji generatorów na linii falistej, odpowiadającej indeksowi m nie ma strzałki.

Żaden generator (23) nie jest diagonalny. Zatem, aby przejść do standardowej bazy, w której $N - 1$ generatorów jest diagonalnych musimy wykonać transformację unitarną. Rozpatrzmy najpierw przypadek $SU(2)$. Z mechniki kwantowej wiemy, że standardowa postać generatorów dla spinu 1 ma postać:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Z kolei generatory (23) mają jawnie postać:

$$\tilde{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Przypomnijmy, jak w mechanice kwantowej definiujemy elementy macierzowe operatorów:

$$\langle n | \tilde{T}_l | k \rangle = \left(\tilde{T}_l \right)_{nk}, \quad (16)$$

co oznacza, że stany transformują się

$$\tilde{T}_l | k \rangle = | n \rangle \left(\tilde{T}_l \right)_{nk}, \quad (17)$$

gdzie suma biegnie po indeksie n . Przypomnijmy jeszcze, że jeżeli dany stan kwantowy reprezentowany jest przez wektor \vec{a} (suma po k)

$$| a \rangle = a_k | k \rangle \quad (18)$$

to

$$\langle n | \tilde{T}_l | a \rangle = \left(\tilde{T}_l \right)_{nk} a_k. \quad (19)$$

Czyli wektory reprezentujące dany stan kwantowy przekształcają się jak w normalnym mnożeniu macierzowym, natomiast stany transformują się w zasadzie poprzez macierz transponowaną. Dotyczy to oczywiście wszystkich operatorów, nie tylko operatorów \tilde{T}_l .

Stany bazowe w reprezentacji z „wężykiem” oznaczyliśmy przez $| n \rangle$, gdzie $n = 1, 2, 3$. Z kolei w reprezentacji standardowej ($m = -1, 0, 1$):

$$\langle j, m' | T_l | j, m \rangle = (T_l)_{m'm}. \quad (20)$$

Rozpatrzmy transformację unitarną

$$| 1, m \rangle = | n \rangle U_{nm} \quad (21)$$

gdzie $n = 1, 2, 3$ (sumowanie), a m jest ustalone: $-1, 0$ lub 1 . Więc:

$$(T_l)_{m'm} = \langle 1, m' | T_l | 1, m \rangle = U_{m'n}^\dagger \langle n | T_l | k \rangle U_{km} = \left(U^\dagger \tilde{T}_l U \right)_{m'm}. \quad (22)$$

Macierz przejścia od jednej bazy do drugiej

$$T_l = U^\dagger \tilde{T}_l U. \quad (23)$$

ma postać:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

co daje *explicite* (wg wzoru (32)):

$$\begin{aligned} |1, +1\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i |2\rangle), \\ |1, 0\rangle &= |3\rangle, \\ |1, -1\rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - i |2\rangle). \end{aligned} \quad (25)$$

Warto zapamiętać znak – w pierwszej relacji.

Powtarzając tę samą procedurę dla grupy SU(3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |\mathbf{8}, 1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|4\rangle + i |5\rangle), \\ |\mathbf{8}, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|6\rangle + i |7\rangle), \\ |\mathbf{8}, 0, 1, +1\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i |2\rangle), \\ |\mathbf{8}, 0, 1, 0\rangle &= |3\rangle, \\ |\mathbf{8}, 0, 1, -1\rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - i |2\rangle), \\ |\mathbf{8}, -1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|6\rangle - i |7\rangle), \\ |\mathbf{8}, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}} (|4\rangle - i |5\rangle), \\ |\mathbf{8}, 0, 0, 0\rangle &= |8\rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

1.2 Szereg Clebscha-Gordana dla grupy SU(3)

Iloczyn dwóch reprezentacji grupy SU(2) o spinach s_1 i s_2 rozkładamy na sumę nieredukowalnych reprezentacji o spinach

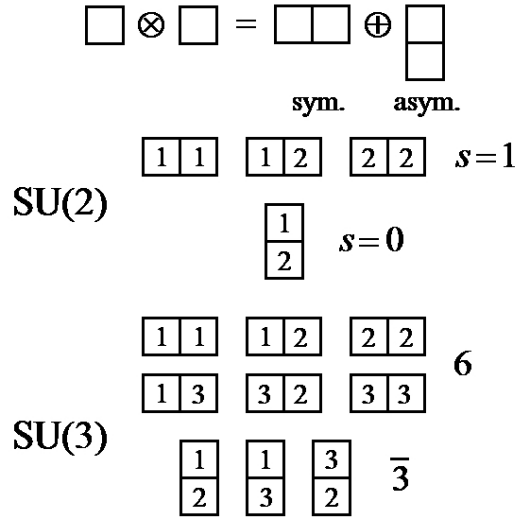
$$|s_1 - s_2| < s < s_1 + s_2. \quad (27)$$

Aby wykonać analogiczny rozkład dla grupy SU(3) warto posłużyć się tzw. diagramami Younga. Diagramy te składają się z kratek (komórek), które oznaczają wektor reprezentacji fundamentalnej. W przypadku iloczynu dwóch wektorów reprezentacji fundamentalnej

u_i gdzie $i = N$, iloczyn taki rozkładam na część symetryczną i antysymetryczną

$$S_{ij} = u_i u_j + u_j u_i, \quad A_{ij} = u_i u_j - u_j u_i. \quad (28)$$

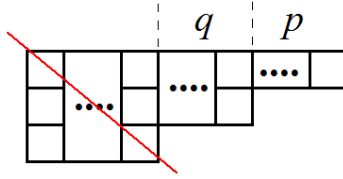
Tensory S i A odpowiadają dwóm nieredukowalnym reprezentacjom, których wymiar zależy od N . W przypadku spinu jest spin 1 (S) oraz spin 0 (A). Na diagramach Younga iloczyn symetryczny dwóch komórek oznacza się rysując je poziomo jedną obok drugiej, a antysymetryzacja jest wtedy, gdy umieszczamy je w pionie (Rys. 6).



Rysunek 6: Diagramy Younga dla iloczynu dwóch reprezentacji fundamentalnych.

Kolumny w diagramach Younga mają maksymalny wymiar N , gdyż jest to największa liczba indeksów reprezentacji fundamentalnej grupy $SU(N)$, którą można zantysymetryzować (symbol $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ jest niezmiennikiem grupy $SU(N)$). N wymiarowa kolumna odpowiada zatem singletowi (nie transformuje się względem transformacji $SU(N)$) i można ją z diagramu Younga wykreślić. Zatem „generyczny” diagram Younga dla grupy $SU(3)$ składa się z p kolumn o jednej komórce, q kolumn o dwóch komórkach i pewnej liczbie kolumn o 3 komórkach, które wykreślamy, tak jak to jest pokazane na rysunku 7. W ten sposób uzyskaliśmy interpretację etykiet reprezentacji grupy $SU(3)$ w formie (p, q) . Ponieważ, jak widzieliśmy na przykładzie z Rys. 6 dwukomórkowa kolumna odpowiada reprezentacji antytrypletowej, popularna i nieściśła interpretacja pary (p, q) sprowadza się do tego, że jest to reprezentacja złożona z p kwarków i q antykwarków. Na koniec zauważmy, że dla dowolnej reprezentacji (p, q) sprzężona reprezentacja (q, p) odpowiada diagramowi Younga dopełniającemu diagram Younga (p, q) do singletu.

Diagramy Younga są bardzo pomocne w konstruowaniu szeregu Clebscha-Gordana dla grupy $SU(3)$ (czy ogólnie $SU(N)$). Rysujemy diagramy Younga dla reprezentacji, które chcemy pomnożyć: $(p_1, q_1) \otimes (p_2, q_2)$. W drugim diagramie wszystkie komórki w pierwszym wierszu oznaczamy przez a , a komórki w drugim wierszu przez b . Następnie wszystkie komórki a z pierwszego rzędu dodajemy do diagramu (p_1, q_1) , tak aby nie były

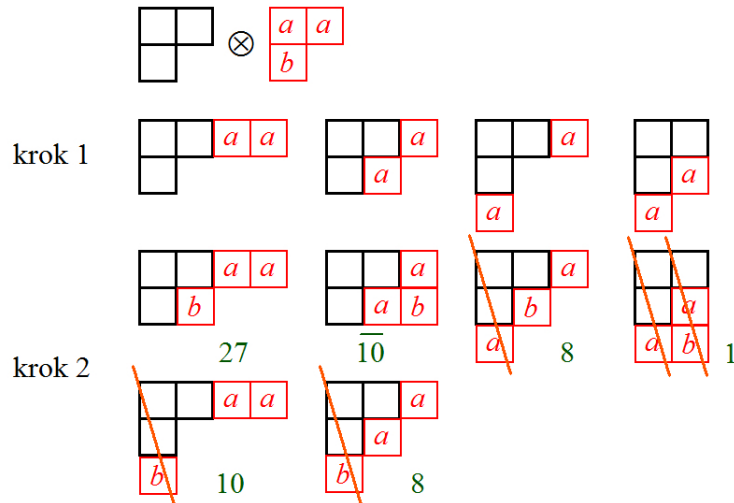


Rysunek 7: „Generyczny” diagram Younga dla grupy SU(3).

one w jednej kolumnie. W ten sposób generujemy kilka nowych diagramów Younga, do których dodajemy komórki b , tak aby nie były one w jednej kolumnie (i tak aby były spełnione ogólne zasady konstrukcji diagramów Younga: drugi wiersz nie może być dłuższy od pierwszego, a trzeci od drugiego, kolumny mogą mieć co najwyżej 3 komórki) i aby spełniony był dodatkowy warunek: idąc wzdłuż wierszy diagramu Younga od prawej do lewej i od góry do dołu, liczba napotkanych komórek a musi być równa lub większa od liczby komórek b . Na końcu wykreślamy wszystkie singlety i obliczamy wymiar reprezentacji przy pomocy wzoru (19). Procedura ta jest zilustrowana na rysunku 8, gdzie skonstruowano szereg C-G:

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}_1 \oplus \mathbf{8}_2 \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{27}. \quad (29)$$

Widzimy, że w tym szeregu pojawiają się dwa różne oktety.



Rysunek 8: Mnożenie dwóch reprezentacji dołączonych grupy SU(3) przy pomocy diagramów Younga.

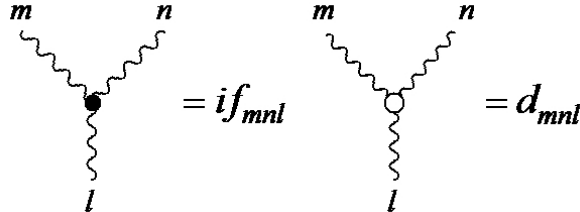
Istnienie dwóch oktetów jest pewną nowością a także trudnością w porównaniu z grupą SU(2). Przypomnijmy sobie ważny wzór na mnożenie dwóch macierzy Pauliego:

$$\tau_m \tau_n = \delta_{mn} \mathbf{1} + i \varepsilon_{mnl} \tau_l. \quad (30)$$

Analogiczny wzór na mnożenie dwóch macierzy Gell-Manna zawiera dodatkowy człon:

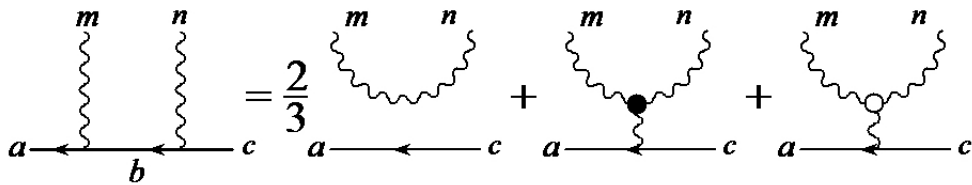
$$\lambda_m \lambda_n = \frac{2}{3} \delta_{mn} \mathbf{1} + i f_{mnl} \lambda_l + d_{mnl} \lambda_l. \quad (31)$$

Stałe d_{mnl} są tensorami całkowicie symetrycznymi. Warto za Cvitanowiciem wprowadzić notację graficzną pokazaną na rysunku 9. Wówczas równanie (42) daje się „narysować”



Rysunek 9: Graficzna notacja dla f_{mnl} oraz d_{mnl} .

jak na rysunku 10.



Rysunek 10: Graficzna reprezentacja równania (42).

Podobnie jak w przypadku grupy SU(2), do konkretnych obliczeń będziemy potrzebować współczynników Clebscha-Gordana dla SU(3). Faktoryzują się one na zwykły współczynnik C-G dla izospinu i tzw. czynnik izoskalarny:

$$\left(\begin{array}{cc|c} (p_1, q_1) & (p_2, q_2) & (p, q)_\gamma \\ Y^{(1)}, I^{(1)}, I_3^{(1)} & Y^{(2)}, I^{(2)}, I_3^{(2)} & Y, I, I_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} I^{(1)} & I^{(2)} & I \\ I_3^{(1)} & I_3^{(2)} & I_3 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{cc|c} (p_1, q_1) & (p_2, q_2) & (p, q)_\gamma \\ Y^{(1)}, I^{(1)} & Y^{(2)}, I^{(2)} & Y, I \end{array} \right), \quad (32)$$

gdzie czynnik γ oznacza degenerację (jak w przykładzie na iloczyn dwóch oktetów).

Widzimy z rysunku 9, że w istocie współczynniki f_{mnl} oraz d_{mnl} są współczynnikami składania dwóch oktetów (stany m i n) na oktet (stan l). Są to współczynniki wyrażone w bazie $|m\rangle$, natomiast współczynniki C-G z równania (43) są wyrażone w bazie $|Y, I, I_3\rangle$. Współczynniki te można „przetłumaczyć” jedno na drugie przy pomocy (37). Widzimy zatem, że dwa oktety pojawiające się w rozkładzie (40) odpowiadają złożeniu symetrycznemu i antysymetrycznemu dwóch oktetów wyjściowych.

Obszerne omówienie własności grupy SU(3) wraz z konwencjami dotyczącymi współczynników C-G, oraz tabele czynników izoskalarnych można znaleźć w przeglądowej pracy

de Swarta z 1963 roku. Rozbudowane tablice współczynników C-G rok później opublikowali McNamee i Chilton. Obecnie w celu znalezienia współczynników C-G najwygodniej posłużyć się programem opublikowanym przez Kaedinga lub opublikowanymi przez niego tablicami.

J.J. de Swart, *Rev. Mod. Phys.* **35** (1963) 916,

P. McNamee, F. Chilton, *Rev. Mod. Phys.* **36** (1964) 1005,

T.A. Kaeding, *Comput. Phys. Commun.* **85** (1995) 82

T.A. Kaeding, *Tables of $SU(3)$ isoscalar factors*, <http://arxiv.org/pdf/nucl-th/9502037.pdf>