

1 Grupa SU(3) c.d.

1.1 Model kwarków

1.1.1 Klasyfikacja mezonów

W 1964 roku Murray Gell-Mann i George Zweig niezależnie zaproponowali schemat klasyfikacji znanych wówczas cząstek (ciągle jeszcze nazywanych elementarnymi) przy pomocy składników, które Gell-Mann nazwał kwarkami a Zweig asami. Początkowo uważano, że jest to tylko trick matematyczny i teoriogrupowy, i że kwarki nie są dynamicznymi cząstkami, z których zbudowane są cząstki, które obserwujemy. Dziś wiemy, że są to prawdziwe cząstki, a za tworzenie stanów związanych odpowiedzialne są oddziaływania silne opisywane przez chromodynamikę kwantową. Znane nam cząstki silnie oddziałujące to mezony i bariony. W roku 1964 znano już stosunkowo wiele mezonów pseudoskalarnych (o spinie 0, symetrie, które decydują, że są to pseudoskalarzy omówimy później), mezony wektorowe (spin 1), bariony o spinie 1/2 i o spinie 3/2.

Założmy, że podstawowymi składnikami materii są kwarki u , d i s , które mają spin 1/2, i ułamkowe ładunki elektryczne

$$e_u = \frac{2}{3}, \quad e_d = e_s = -\frac{1}{3}. \quad (1)$$

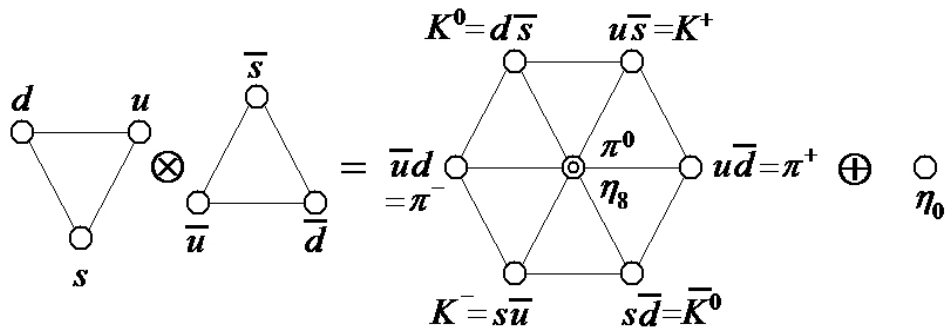
Zakładamy, że w pierwszym przybliżeniu wszystkie kwarki mają tę samą masę m . Założenie to nie jest prawdziwe, kwarki u i d mają masy prawie jednakowe, ale kwark s jest wyraźnie cięższy. Zakładamy jednak, że efekty tej różnicy możemy potraktować jako zaburzenie. Zatem w pierwszym przybliżeniu o trzech kwarkach u , d i s zakładamy, że należą do reprezentacji fundamentalnej grupy SU(3) (antykwariki do $\bar{\mathbf{3}}$), której łamanie uwzględnimy perturbacyjnie:

$$\begin{aligned} |u\rangle &= \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, & |\bar{u}\rangle &= \left| (\bar{\mathbf{3}}) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ |d\rangle &= \left| (\mathbf{3}) \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, & |\bar{d}\rangle &= \left| (\bar{\mathbf{3}}) -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ |s\rangle &= \left| (\mathbf{3}) -\frac{2}{3}, 0, 0 \right\rangle, & |\bar{s}\rangle &= \left| (\bar{\mathbf{3}}) \frac{2}{3}, 0, 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Mezony są zbudowane z jednego kwarku i antykwarku, a więc należą do singletu i oktetu SU(3), co można wyliczyć przy pomocy diagramów Younga:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \quad (3)$$

Ponieważ zarówno I_3 jak i Y są addytywne, wszystkie stany na obwodni oktetu są po prostu stanami iloczynowymi, natomiast stany „w środku” są pewnymi kombinacjami liniowymi, które łatwo znaleźć posługując się własnościami izospinowej grupy SU(2) – patrz rysunek ??.



Rysunek 1: Graficzna reprezentacja równania (??).

Stan $|\pi^0\rangle$ bardzo łatwo skonstruować działając obustronnie na $|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle$ operatorem I_- :

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle). \quad (4)$$

Jednakże aby skonstruować stany $|\eta_8\rangle$ i $|\eta_0\rangle$ musimy posłużyć się tablicą współczynników C-G.

Współczynniki Clebscha-Gordana dla $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$

						1	8	8
						0	0	0
						0	0	1
						0	0	0
$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 |\eta_8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle + 2|s\bar{s}\rangle), \\
 |\eta_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Zauważmy, że stany η zostały tak skonstruowane, że – mimo iż mają te same liczby kwantowe Y, I oraz I_3 – mają różne własności transformacyjne ze względu na grupę $SU(3)$. Ponieważ jednak grupa $SU(3)$ jest złamana, nic nie stałoby na przeszkodzie, aby stany fizyczne były jakimiś wzajemnie ortogonalnymi kombinacjami liniowymi stanów $|\eta_8\rangle$ i $|\eta_0\rangle$. Okazuje się, że dla mezonów pseudoskalarnych takie mieszanie nie zachodzi i stany fizyczne są tożsame ze stanami $SU(3)$:

$$|\eta\rangle = |\eta_8\rangle, \quad |\eta'\rangle = |\eta_0\rangle. \tag{6}$$

Do tej pory przyjęliśmy milczące założenie, że spiny kwarku i antykwarku składają się na $s = 0$. Jednakże w analogiczny sposób możemy skonstruować mezony wektorowe, które mają spin 1: K^* , ρ (analogon π), ω_8 (analogon η_8) oraz ω_0 (analogon singletu η_0). W przeciwieństwie do mezonów pseudoskalarnych stany fizyczne cząstek o liczbach kwantowych $Y = I = I_3 = 0$ są w tym przypadku mieszaniną stanów $|\omega_8\rangle$ oraz $|\omega_0\rangle$. W rzeczywistości stany fizyczne diagonalizują dziwność:

$$\begin{aligned}
 |\omega\rangle &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle), \\
 |\phi\rangle &\simeq |s\bar{s}\rangle.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Często przyjmuje się dodatkowy minus dla \bar{d} i \bar{s} . Wówczas w singlicie $|\eta_0\rangle$ mamy same plusy, ale jednocześnie zmieniają się fazy w $|\eta_8\rangle$ oraz $|\pi^0\rangle$ (zauważmy, że ogólna faza dla np. mezonów $K^{0,+}$ nie odgrywa znaczenia).

1.1.2 Rozszczepienia – twierdzenie Ekarta-Wignera

W rzeczywistości kwark dziwny s jest cięższy od pozostałych kwarków u i d . W tym miejscu warto zwrócić uwagę na rozróżnienie między masą „ubraną” (ang. *constituent mass*) i „gołą” (ang. *bare* lub *current*)....

Z łamania symetrii chiralnej wynika, że dla mezonów pseudo-skalarnych

$$M_{\text{mezon}}^2 \sim m_{\text{kwark}}. \quad (8)$$

Wymiarowa stała proporcjonalności w relacji (??) charakteryzuje własności próżni. W bazie (??) operator łamiący równość mas kwarków u , d i s ($m = m_u = m_d$) ma postać

$$H' = (m_s - m) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{(m_s - m)}{3} (1 - \sqrt{3}\lambda_8). \quad (9)$$

Ponieważ człon proporcjonalny do macierzy jednostkowej nie łamie symetrii SU(3), za jej złamanie odpowiedzialny jest jedynie kawałek z λ_8 .

Dla mezonów wektorowych nie mamy silnych podstaw teoretycznych aby stosować relację kwadratową (??), możnaby stosować zwykłą relację liniową. Jak się przekonamy, oba typy relacji dają dla mezonów wektorowych bardzo zbliżone rezultaty.

Zauważmy, że z punktu widzenia własności transformacyjnych λ_8 jest składową zbioru nieredukowalnych operatorów tensorowych, transformujących się jak oktet SU(3):

$$H' \sim O_8^{(8)} \quad (10)$$

W reprezentacji fundamentalnej operatory te mają jawną postać (??). Aby obliczyć działanie takiego operatora na stany z innych reprezentacji posłużymy się twierdzeniem Eckarta-Wignera, które mówi, że elementy macierzowe operatora tensorowego są proporcjonalne do współczynników Clebscha-Gordana. Stałe proporcjonalności, tzw. zredukowane elementy macierzowe, zależą od konkretnych reprezentacji, ale nie od liczb kwantowych konkretnych stanów. Ponieważ $|(\mathbf{8}) 8\rangle = |(\mathbf{8}) 0, 0, 0\rangle$ (patrz wzór (??)), mamy

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(8)} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle &= \alpha_1 \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}_1 \\ 0, 0, 0 & Y, I, I_3 & Y, I, I_3 \end{array} \right) \\ &+ \alpha_2 \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}_2 \\ 0, 0, 0 & Y, I, I_3 & Y, I, I_3 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Wynik zależy od 2 stałych, gdyż w rozkładzie $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ pojawiają się dwa oktety. Ponieważ $O_8^{(8)}$ ma izospin 0, to współczynniki izospinowe C-G są równe 1 (patrz (??)), a stąd współczynniki SU(3) są w tym wypadku równe współczynnikom izoskalarnym, które wynoszą:

	$\mathbf{8}_1$	$\mathbf{8}_2$	
K	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	
π	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	
η	0	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	
\bar{K}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	(12)

Element macierzowy (??) można sparametryzować analitycznie:

$$\langle (\mathbf{8}) Y, I, I_3 | O_8^{(8)} | (\mathbf{8}) Y, I, I_3 \rangle = a' + bY + c \left[I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right], \quad (13)$$

gdzie stałe a', b oraz c są pewnymi kombinacjami stałych $\alpha_{1,2}$. Zatem kwadraty mas mezonów wyrażają się wzorem

$$M^2 = a + bY + c \left[I(I + 1) - \frac{1}{4}Y^2 \right], \quad (14)$$

gdzie stała a zawiera stałą a' plus przyczynek od masy m (wkład niezaburzony).

Zauważmy, że – ponieważ stany o $Y = -1$ są antycząstkami stanów $Y = 1$ (Rys. ??), więc powinny mieć równe masy – dla mezonów $b = 0$. Stąd:

$$\begin{aligned} M_K^2 &= a + \frac{1}{2}c, \\ M_\pi^2 &= a + 2c, \\ M_{\eta_8}^2 &= a, \end{aligned} \quad (15)$$

Ponieważ trzy różne masy zależą od tylko od dwóch parametrów, mamy jedną relację między masami (Gell-Mann, Okubo):

$$4M_K^2 = M_\pi^2 + 3M_\eta^2. \quad (16)$$

Przyjmując za masę cząstki średnią z różnych stanów ładunkowych mamy (masy w MeV):

$$\begin{aligned} 4 \times (495.64)^2 &= (138.04)^2 + 3 \times (547.86)^2 \\ 982\,652 &= 919\,513 \end{aligned} \quad (17)$$

co daje dokładność 6,5% liczoną jako różnica strony lewej i prawej podzielona przez ich średnią. Gdyby formułę tę napisać dla mas a nie dla ich kwadratów, jej dokładność byłaby dwa razy gorsza, ale w sumie też niezła.

Dla mezonów wektorowych, przyjmując $M_{K^*} = 892$ MeV oraz $M_\rho = 775$ MeV relacja

$$\frac{4M_{K^*}^2 - M_\rho^2}{3} = M_\omega^2 \quad (18)$$

daje $M_\omega = 927$ MeV, podczas gdy doświadczalnie $M_\omega = 783$ MeV. Ta duża różnica nie znika nawet gdyby przyjąć liniową relację masową (wówczas $M_\omega = 931$ MeV).

Słaba zgodność relacji (??) z doświadczeniem wynika z faktu, że symetria SU(3) jest naruszona. Podobnie jak w przypadku mezonów pseudoskalarnych oczekujemy, że powinien istnieć wektorowy mezon będący skalarom SU(3). Rzeczywiście w tablicach cząstek możemy znaleźć cząstkę ϕ o masie 1020 MeV i izospinie 0. Ze względu na łamanie symetrii SU(3) obserwowalne cząstki fizyczne, nie muszą być „czystymi” stanami SU(3) tylko ich „mieszankami”:

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \cos \theta |\omega_8\rangle - \sin \theta |\omega_0\rangle, \\ |\phi\rangle &= \sin \theta |\omega_8\rangle + \cos \theta |\omega_0\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie „masa” M_8^2 stanu $|\omega_8\rangle$ spełnia regułę GMO (??). Oznacza to, że w bazie stanów SU(3) macierz mas w tym sektorze nie jest diagonalna:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_8^2 & V_{80}^2 \\ V_{08}^2 & M_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\omega^2 & 0 \\ 0 & M_\phi^2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Odwracając tę relację dostajemy:

$$\begin{bmatrix} M_8^2 & V_{80}^2 \\ V_{08}^2 & M_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\omega^2 \cos^2 \theta + M_\phi^2 \sin^2 \theta & (M_\phi^2 - M_\omega^2) \sin \theta \cos \theta \\ (M_\phi^2 - M_\omega^2) \sin \theta \cos \theta & M_\phi^2 \cos^2 \theta + M_\omega^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Z równania

$$M_8^2 = M_\omega^2 \cos^2 \theta + M_\phi^2 \sin^2 \theta \quad (22)$$

dostajemy

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{M_8^2 - M_\omega^2}{M_\phi^2 - M_\omega^2}} = \pm 0.76 \quad (23)$$

Łatwo się przekonać, że stany (??) rzeczywiście diagonalizują macierz mas. Podstawiając (??) do (??)

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\cos \theta (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) + 2|s\bar{s}\rangle - \sqrt{2} \sin \theta (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle) \right], \\ |\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\sin \theta (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) + 2|s\bar{s}\rangle + \sqrt{2} \cos \theta (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

widzimy, że jeśli

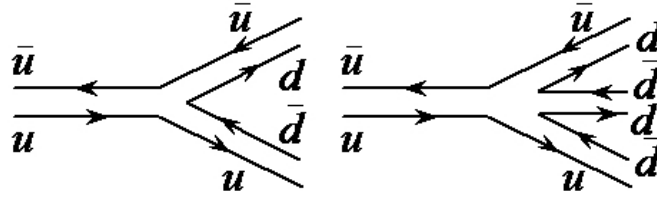
$$\sin \theta = -\sqrt{2} \cos \theta \rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0.81 \quad (25)$$

to

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle), \\ |\phi\rangle &= |s\bar{s}\rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Warto dodać, że gdyby dla mezonów wektorowych zastosować liniową relację masową GMO, kąt mieszania byłby bardzo podobny: $\sin \theta = \pm 0.78$.

Znajomość składu kwarkowego mezonów wektorowych pozwala na jakościową analizę ich rozpadów przez oddziaływania silne. Zauważmy, że ponieważ mezony pseudoskalarne są najbliższymi z mezonów, mogą rozpadać się poprzez oddziaływania słabe lub elektromagnetyczne, ale nie poprzez oddziaływania silne. Rozpad poprzez oddziaływania silne polega na wykreowaniu z próżni pary kwark-antykwar (najłatwiej wykreować oczywiście parę lekkich kwarków), lub kilku takich par, które następnie tworzą nowe, lżejsze mezony pseudoskalarne. Najprostsze takie rozpady mezonu ω pokazane są na rysunku ??.



Rysunek 2: Rozpad silny mezonu ω .

Ponieważ mezon ω składa się głównie z kwarków u i d , więc głównym kanałem rozpadu powinien być rozpad na dwa piony (łatwiej jest wykreować z próżni jedną parę kwarków niż dwie). Jednak doświadczalnie taki rozpad jest bardzo rzadki (zaledwie 1,5 %), natomiast rozpad na trzy cząstki π jest dominujący (89 %). Wiąże się to z zachowaniem izospinu w oddziaływaniach silnych. Ponieważ ω jest singletem izospinowym dwa piony w stanie końcowym należy złożyć na stan $|I = 0, I_3 = 0\rangle$. Pamiętając, że cząstki π tworzą tryplet izospinowy ($I = 1$), musimy popatrzeć na odpowiednie współczynniki Clebscha-Gordana:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|\pi^+\rangle |\pi^-\rangle + |\pi^-\rangle |\pi^+\rangle - |\pi^0\rangle |\pi^0\rangle). \quad (27)$$

Mezon ω ma parzystość $-$, podobnie jak mezony π . W związku z tym dwa mezony π powinny być w stanie o przestrzennej parzystości równej $-$, co oznacza, że funkcja falowa stanu końcowego powinna być antysymetryczna przy przestawieniu

$$|a\rangle |b\rangle \rightarrow |b\rangle |a\rangle. \quad (28)$$

Tak jest przy rozpadzie mezonu $\rho^0 = |1, 0\rangle$

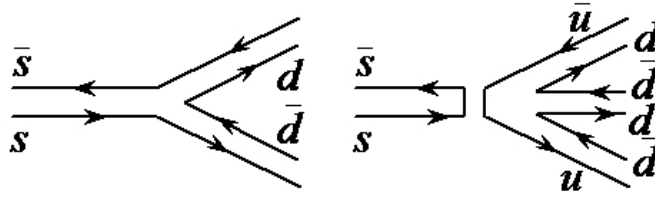
$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^+\rangle |\pi^-\rangle - |\pi^-\rangle |\pi^+\rangle) \quad (29)$$

i dlatego mezon ρ rozpada się niemal w 100% na dwa piony. Natomiast rozpad $\omega \rightarrow \pi\pi$ jest „zakazany”.

Z kolei cząstka ϕ może się bez problemu rozpaść na dwa mezony K , które są dubletami izospinowymi, gdyż

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right). \quad (30)$$

Rzeczywiście rozpad $\phi \rightarrow K^+ K^-$, $K^0 \bar{K}^0$ stanowi 83% wszystkich rozpadów ϕ . Rozpad na 3 piony zachodzi na poziomie 15%. Wiąże się to z faktem, że kwarki dziwne muszą zanihilować, tak jak to pokazuje drugi diagram na rysunku ???. Tłumienie takich rozpadów nazywane jest regułą Zweiga.



Rysunek 3: Rozpad silny mezonu ϕ .

1.1.3 Klasyfikacja barionów

Bariony to cząstki złożone z trzech kwarków. Zobaczmy jakie reprezentacje SU(3) można skonstruować z trzech kwarków:

$$\begin{array}{rcc}
 \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} & = & \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6} \\
 \otimes \mathbf{3} & & \swarrow \quad \searrow \\
 \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} & & \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}
 \end{array}$$

Ze względu na to, że mamy do czynienia z trzema kwarkami spodziewamy się, że najlżejsze bariony będą miały spin $1/2$ lub $3/2$, choć możliwe są także spiny wyższe (i występują takie eksperymentalnie) ze względu na kręt orbitalny (rotacja kwarków w przestrzeni). Konstruując bariony musimy uwzględnić zakaz Pauliego. Znane dzisiaj bariony można podzielić na 20 multipletów (V. Guzey, M.V. Polyakov hep-ph/0512355). Tu zajmiemy się najlżejszymi barionami: oktetem o spinie $1/2$ i dekupletem o spinie $3/2$. Nie obserwuje się najlżejszego singletu (bez krętu orbitalnego).

Zastanówmy się najpierw, dlaczego oktet ma spin $1/2$ a dekuplet $3/2$. Patrząc na diagram Younga dla oktetu widzimy, że dwa kwarki w kolumnie antysymetryzujemy, w związku z czym antysymetryzujemy też spin, co daje $s = 0$. Do takiego układu dodajemy trzeci kwark i cały układ ma spin $1/2$. Z kolei w dekuplecie mamy kompletnie symetryczny układ trzech kwarków. Symetryzacja trzech spinów daje spin $3/2$. Z kolei singlet SU(3) to kompletnie antysymetryczny stan uds , dlatego nie da się skonstruować bez krętu orbitalnego stanu o $s = 1/2$ lub $3/2$.

Uwzględnienie masy kwarku dziwnego $m_s > m$ prowadzi do łamania symetrii SU(3) i rozszczepienia masowego w oktecie i dekuplecie. Dla oktetu masy (nie ich kwadraty!) barionów wyrażają się wzorem (??), przy czym stałe a , b i c są oczywiście inne niż dla mezonów, w szczególności $b \neq 0$. Przyjmując średnie masy (w MeV) mamy:

$$\begin{aligned}
 N(939) &= a + b + \frac{1}{2}c, \\
 \Lambda(1116) &= a, \\
 \Sigma(1193) &= a + 2c, \\
 \Xi(1318) &= a - b + \frac{1}{2}c.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Cztery masy wyrażone są w równaniu (??) przez 3 stałe, zatem istnieje jedna relacja między nimi (Gell-Mann, Okubo):

$$m_N + m_\Xi = \frac{1}{2}(3m_\Lambda + m_\Sigma). \quad (32)$$

Podstawiając wartości mas otrzymujemy (w MeV):

$$2257 = 2270.5.$$

Widzimy zatem, że relacja GMO dla podstawowego oktetu spełniona jest na poziomie 0,6%!

Dla dekupletu otrzymujemy bardzo prostą relację

$$M = a + bY. \quad (33)$$

Oznacza to, że poszczególne „szczeble” dekupletu są równoodległe:

$$\Omega(1672) - \Xi^*(1530) = \Xi^*(1530) - \Sigma^*(1385) = \Sigma^*(1385) - \Delta(1232). \quad (34)$$

Podstawiając wartości mas otrzymujemy (w MeV):

$$142 = 145 = 153.$$

Sukcesem modelu kwarków było przewidzenie istnienia cząstki Ω i podanie jej masy. Jednakże do dziś nie został zmierzony spin Ω !

1.1.4 Ograniczenia modelu kwarków

Widzimy, że w trakcie omawiania spektr mezonów i barionów traktowaliśmy kwarki jako rzeczywiste składniki cząstek, a nie jedynie jako matematyczny trick służący do opisu multipletów SU(3). Ten sposób myślenia dał podwaliny nierelatywistycznemu modelowi kwarków, w którym zakłada się, że kwarki poruszają się w pewnym uśrednionym potencjale i zaniedbuje się oddziaływania między nimi. Uwzględniając spin, można dość łatwo napisać funkcję falową, która faktoryzuje się na część przestrzenną, spinową, i kwarkową (ang. *flavor*)

$$\psi = \psi_{\text{przestrzeń}} \psi_{\text{spin}} \psi_{\text{flavor}}. \quad (35)$$

Tu pojawia się pierwszy problem. Gdybyśmy chcieli napisać funkcję falową dla cząstki Δ^{++} , która składa się z trzech kwarków u i ma spin $3/2$, to funkcja falowa o $s_3 = +3/2$ miałaby postać:

$$\psi_{\Delta^{++}}^{3/2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = u^\uparrow(\vec{r}_1)u^\uparrow(\vec{r}_2)u^\uparrow(\vec{r}_3). \quad (36)$$

Widzimy, że funkcja ta jest całkowicie symetryczna, co jest sprzeczne z zakazem Pauliego; przy przestawieniu dwóch fermionów f . falowa powinna zmieniać znak. Doprowadziło to do postulowania dodatkowej liczby kwantowej, która powodowałaby, że funkcja barionu Δ byłaby antysymetryczna:

$$\psi_{\Delta^{++}}^{3/2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \mathcal{N} \varepsilon^{abc} u_a^\uparrow(\vec{r}_1)u_b^\uparrow(\vec{r}_2)u_c^\uparrow(\vec{r}_3). \quad (37)$$

Tę nową liczbę kwantową nazwano kolorem (gdyż przyjmuje 3 wartości: $a, b, c = 1, 2, 3$). Stąd pełna funkcja falowa barionu

$$\psi = \psi_{\text{przestrzeń}} \psi_{\text{spin}} \psi_{\text{flavor}} \psi_{\text{kolor}} \quad (38)$$

spełnia zakaz Pauliego. Dziś kolor interpretujemy w języku lokalnej symetrii cechowania opartej na grupie SU(3). Czyli indeksy a, b, c są indeksami reprezentacji fundamentalnej grupy SU(3) zwanej kolorem.

Drugi problem związany z modelem kwarków polega na tym, że nie udało się zaobserwować swobodnych kwarków. Doprowadziło to sformułowania zasady, że cząstki obserwowalne w przyrodzie są singletami kolorowymi. Jak widzieliśmy singlet SU(3) pojawia się w złożeniu 3 kwarków $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ oraz kwarku i antykwarku $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$, a także przy składaniu większej liczby kwarków i antykwarków. Stąd cząstkami, które obserwujemy w przyrodzie są mezony i bariony, ale możliwe są też tetrakwarki ($qq\bar{q}\bar{q}$), czy pentakwarki ($qqqq\bar{q}$).

Trzeci problem, to właściwie zupełny brak uzasadnienia, dlaczego podejście nierelatywistyczne miałyby się stosować do lekkich kwarków i dlaczego można pominąć oddziaływanie między kwarkami. Podejście nierelatywistyczne może mieć uzasadnienie w przypadku ciężkich kwarków c i b . Alternatywnym podejściem (np. podręcznik Griffith'a) jest uwzględnienie oddziaływania poprzez oddziaływanie spinów kwarków. To podejście znowu słabo uzasadnione dla lekkich kwarków daje zaskakująco dobre wyniki w przypadku kwarków ciężkich.

Jak widzieliśmy, aby poprawnie skonstruować funkcje falową barionu w modelu kwarków, trzeba było uwzględnić spin. Ta obserwacja doprowadziła do zapostulowania szerszej symetrii, mianowicie SU(6) (flavor \times spin). Wyniki tej klasyfikacji cząstek wychodzą poza ramy tego wykładu.