1 Grupa SU(3) i klasyfikacja cząstek

1.1 Grupa SU(N)

Unitarne (zespolone) macierze $N \times N$ można sparametryzować pzez $2N^2$ rzeczywistych parametrów. Ale

- $\det U = 1$,
- unitarność: $U^\dagger U = 1$

narzucają dodatkowe warunki. Rozważmy warunek drugi:

$$\left[\begin{array}{c} [\quad \vec{u}_1^\dagger \quad] \\ \cdots \\ [\quad \vec{u}_n^\dagger \quad] \end{array}\right] \left[\left[\begin{array}{c} \\ \vec{u}_1 \\ \\ \end{array}\right] \cdots \left[\begin{array}{c} \\ \vec{u}_n \\ \\ \end{array}\right]\right] = 1, \tag{1}$$

(gdzie $\vec{u}_i$ są N wymiarowymi wektorami zespolonymi) co daje N^2 równań zespolonych:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_1 &= 1, \ \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_2 = 0, \ \ldots \ \vec{u}_1^\dagger \vec{u}_n = 0, \\ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_1 &= 0, \ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_2 = 1, \ \ldots \ \vec{u}_2^\dagger \vec{u}_n = 0, \\ &\vdots \\ \vec{u}_n^\dagger \vec{u}_1 &= 0, \ \vec{u}_n^\dagger \vec{u}_2 = 0, \ \ldots \ \vec{u}_n^\dagger \vec{u}_n = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Ale, oprócz równań diagonalnych $\vec{u}_i^\dagger \vec{u}_i = 1$, pozostałe równania są parami zależne, np.: $\vec{u}_1^\dagger \vec{u}_2 = 0$ oraz $\vec{u}_2^\dagger \vec{u}_1 = 0$. Zatem niezależne są tylko równania „nad diagonalną”, których jest $(N^2 - N)/2$ oraz te na diagonalnej których jest N. Jednak równania „nad diagonalną” są zespolone, a więc dają $N^2 - N$ warunków rzeczywistych, natomiast równania „na diagonalii” są rzeczywiste i dają N warunków rzeczywistych. Zatem unitarność daje N^2 warunków rzeczywistych.

Zauważmy, że równanie (1) gwarantuje, że $|\det U| = 1$, zatem warunek $\det U = 1$ określa dodatkowo tylko fazę U, czyli daje dodatkowo jeden warunek rzeczywisty (a nie dwa, jakby się można spodziewać).

Zatem całkowita liczba parametrów opisująca macierz SU(N) wynosi:

$$2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1. \tag{3}$$

Wygodną metodą parametryzacji macierzy SU(N) jest forma exponencjalna

$$U = \exp\left(-i \sum_{n=1}^{N^2-1} \alpha_n T_n\right) = e^{-i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} \tag{4}$$

gdzie $\vec{\alpha}$ jest $N^2 - 1$ wymiarowym wektorem rzeczywistym, a $N^2 - 1$ hermitowskich (bo musi być $U^\dagger U = 1$) macierzy $N \times N$ oznaczonych jako T_n, nazywanych jest generatorami grupy SU(N). Dodatkowo macierze T_n są bezśladowe, co wynika z tożsamości

$$\det U = \exp\left(\mathrm{Tr}\log U\right). \tag{5}$$

Znany przykład z grupy SU(2):

$$T_n = \frac{1}{2}\tau_n,\ n = 1, 2, 3, \tag{6}$$

gdzie τ_n są macierzami Pauliego. Czynnik 1/2 jest kwestią konwencji.

Aby macierz U była rzeczywiście jednoznacznie sparametryzowana przez $N^2 - 1$ parametrów α_n, macierze T_n muszą być liniowo niezależne, tzn.

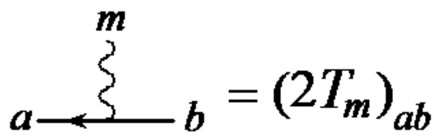
$$\text{jeżeli } \vec{\alpha} \cdot \vec{T} = 0 \text{ to } \vec{\alpha} \equiv 0.$$

Ten warunek jest spełniony gdy

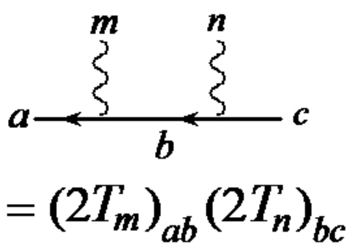
$$\mathrm{Tr}(T_m T_n) = \frac{1}{2}\delta_{mn}. \tag{7}$$

Tu znowu 1/2 jest konwencją.

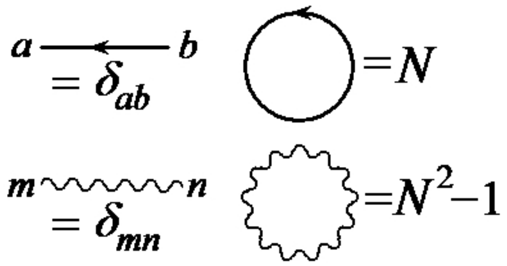
Warto, za Cvitanowviciem, przyjąć konwencję graficzną obrazującą generatory (czynnik 2 pojawia się, gdyż notacja jest w zasadzie dla macierzy Pauliego i dla ich odpowiedników SU(3), macierzy Gell-Manna):



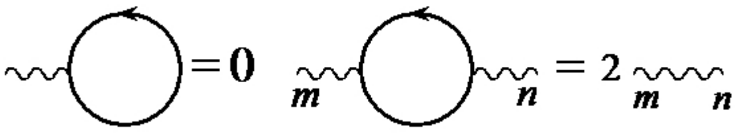
W tej notacji mnożenie macierzy ma postać:



Dodatkowo wprowadźmy delty Kronekera i ich ślady:



W tej graficznej notacji bezśladowiść generatorów i równanie (7) przyjmują postać:



Oczywiście generatory T_m są nieprzemienne

$$[T_m, T_n] = i f_{mnl} T_l, \tag{8}$$

gdzie całkowicie antysymetryczne stałe f_{mnl} są nazywane stałymi struktury grupy SU(N) – dla grupy SU(2) są to symbole Levi-Civity:

$$f_{mnl} = \varepsilon_{mnl}.$$

Aby w sposób jawny zdefiniować grupę SU(N) należy albo podać jawną postać generatorów $N \times N$, czyli jawną postać generatorów w reprezentacji *fundamentalnej* (zwanej także definiującą), albo podać wartości numeryczne stałych strukuiry f_{mnl}. Oczywiście są to metody równoważne: znając jawną postać generatorów można wyliczyć stałe struktury i odwrotnie, znając stałe struktury można obliczyć jawną postać generatorów nie tylkow reprezentacji fundamentalnej, ale w dowolnej reprezentacji grupy SU(N).

1.2 Reprezentacje grupy SU(2) i SU(3)

Relacja komutacji (8) jest spełniona nie tylko przez macierze $N \times N$ definiujące grupę SU(N), ale także przez macierze wyżej wymiarowe. Dla grupy SU(2) reprezentacja fundamentalna dana jest przez macierze Pauliego odpowiadające spinowi $s = 1/2$, ale wiemy że dopuszczalne są reprezentacje wyżej wymiarowe o spinie $s = n/2$, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$, które mają wymiar $(2s + 1)$. Z matematycznego punktu widzenia reprezentacja grupy jest określona przez zbiór macierzy spełniających (8), fizycy poprzez reprezentację rozumieją często *bazę*, w której macierze te działają. W przypadku grupy SU(2) taką bazą są wektory odpowiadające spinowi s i wartości własnej T_3 osnaczanej jako m:

$$|s, m\rangle$$

gdzie m przyjmuje $2s+1$ wartości: $-m, -m+1, \ldots m-1, m$. Wynika to stąd, że dla grupy SU(2) spośrod trzech generetorów $T_{1,2,3}$ jeden można zdiagonalizować, zwyczajowo djagonalizuje się T_3, i że diagonalny jest tzw. operaotor Casimira

$$\vec{T}^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = s(s+1)\mathbf{1}.$$

Czyli stany w danej reprezentacji numerujemy liczbami kwantowymi odpowiadającymi wartościom własnym dwóch diagonalnych operatorów: $\vec{T}^2$ i T_3. Zwrócmy uwagę, że liczba kwantowa s jest nie tylko jednoznacznie zwiazana z wartością $\vec{T}^2$ ale także z wymiarem reprezentacji, który jest równy $2s+1$.

Dla grupy SU(3) sytuacja jest bardziej skomplikowana z dwóch powodów. Po pierwsze spośród 8 generatorów (pamiętajmy, że dla $N=3$ liczba generatorów wynosi $N^2-1=8$) można jednocześnie zdiagonalizować dwa z nich. Widać to np. z jawnej postaci macierzy Gell-Mann'a, które są dla grupy SU(3) odpowiednikem macierzy Pauliego:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \\
\lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Widzimy, że pierwsze trzy macierze Gell-Manna odpowiadają zanurzonym w lewym, górnym rogu macierzom Pauliego. Oznacza to, że w grupie SU(3) istnieje podgrupa SU(2), którą nazywać będziemy izospinem. A zatem stany bazowe będziemy numerować wartościami I i I_3 odpowiadajacymi tej podgrupie. Oprócz tego diagonalna jest macierz λ_8, a odpowiadającą jej liczbę kwantową $Y = \lambda_8/\sqrt{3}$ nazywamy hiperładunkiem. Zatem stany bazowe dla reprezentacji fundamentalnej o wymiarze 3, oznaczane $|(\mathbf{3})Y, I, I_3\rangle$,to:

$$\left|(\mathbf{3})\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \left|(\mathbf{3})\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \left|(\mathbf{3}) - \frac{2}{3}, 0, 0\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Ogólnie dla grupy SU(N) można jednocześnie zdiagonalizować $N-1$ generatorów (mówimy, że *rząd* grupy SU(N) wynosi $N-1$). Oprócz tego, podanie wymiaru, lub wartości operatora Casimira nie wyznacza jednoznacznie reprezentacji. Począwszy od $N=3$ możemy mieć kilka reprezentacji o tym samym wymiarze, ktore są jednak istotnie różne (nie są unitarnie równoważne). Zauważmy, że macierze $-T_m^*$ mają te same relacje konutacji, co macierze T_m (ze względu na to, że stałe struktury f_{mnl} są rzeczywiste). Oznacza to, że istnieje druga reprezentacja trzywymarowa, która jest *sprzęzona* do reprezentacji fundamentalnej (oznaczamy ją jako $\overline{\mathbf{3}}$). Stany bazowe dla tej reprezentacji mają postać:

$$\left|(\overline{\mathbf{3}}) - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \left|(\overline{\mathbf{3}}) - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \left|(\overline{\mathbf{3}}) \frac{2}{3}, 0, 0\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Można zapytać, dlaczego w przypadku grupy SU(2) (a więc spinu), nie musieliśmy wprowadzać pojęcia reprezentacji sprzężonej. Wiąze się to z tym, że dla macierzy Pauliego istnieje macierz U taka, że

$$U \tau_m U^\dagger = -\tau_m^*, \tag{12}$$

czyli, że reprezentacja $s = 1/2$ i reprezentacja sprzężona do niej są unitarnie równoważne. Ta własność nie zachodzi dla grup SU(N) przy $N > 2$. Stąd w notacji graficznej użyliśmy strzałki do oznaczenia generatorów w reprezentacji $\mathbf{3}$. Strzałka w przeciwną stronę oznacza reprezentację $\overline{\mathbf{3}}$.

Ponadto, jak się przekonamy, istnieją także reprezentacje o tym samym wymiarze, które są różne i nie są wzajemnie sprzężone.