Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 13

na dzień 21.1.2020. wtorek 8:30

sala A-0-13

Dokładne i przybliżone rozwiązania problemu trójciałowego

1. Przeprowadzić redukcję systemu dwuciałowego dla różnych mas m_1 i m_2 w zmiennych $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ i w zmiennej $\vec{p}$ ruchu względnego. Wykazać, że w granicy $m_1 = m_2$ względny pęd $\vec{p}_{12} \to (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2$.

2. Teraz zajmiemy się problemem dwuciałowym cząstek o równych masach z oddziaływaniem $V(r_{12})$, gdzie $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Przepisać hamiltonian dla takiego systemu w zmiennych $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ oraz $\vec{p} = (p_1 - p_2)/2$. Przyponieć sobie, ile wynoszą warości energii dla części oddziaływania dwuciałowego H_{12} (bez ruchu środka masy) dla potencjału coulombowskiego i harmonicznego:
$$V(r) = -b^2/r \qquad \text{oraz} \qquad V(r) = \kappa r^2/2. \tag{1}$$

3. Energię stanu podstawowego E_0 można oszacować od dołu korzystając z nierówności (metoda wariacyjna)
$$\langle \psi | H_{12} | \psi \rangle \geq E_0 \langle \psi | \psi \rangle , \tag{2}$$
którą minimalizuje się ze względu na ψ. Wykazać, że nierówność (2) jest także prawdziwa dla systemu trójciałowego, tzn. w przypadku gdy funkcje falowa zależy nie tylko od $\vec{r}_{1,2}$, ale też od $\vec{r}_3$ (ale hamiltionan jest nadal tylko w zmiennych 1 i 2).

4. Dla problemu trójciałowego będziemy zakładać, że
$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = V(r_{12}) + V(r_{23}) + V(r_{13}). \tag{3}$$
Poprzednio wykazaliśmy tożsamość
$$3(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2 + (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_3)^2. \tag{4}$$
Korzystając z tej tożsamości roseparować hamiltonian trójciałowy (wszystkie masy równe) na ruch środka masy i część odddziaływania przyjmując względny pęd $\vec{p}_{ij} = (\vec{p}_i - \vec{p}_j)/2$:
$$H^{(3)} = H_{\rm cm} + \underbrace{H_{12} + H_{23} + H_{13}}_{=H^{(3)}_{\rm wzgl.}}. \tag{5}$$
Podać jawną postać poszczególnych składowych. Czy hamiltoniany H_{ij} komutują ze sobą? Co by było, gdyby komutowały?

5. Oznaczmy znormalizowany stan podstawowy $H^{(3)}_{\text{wzgl.}}$ jako $|\Omega\rangle$ i odpowiadającą mu energię jako $E^{(3)}$. Wykazać związek

$$E^{(3)} \geq 3E^{(2)}(\mu_3) \tag{6}$$

gdzie $E^{(2)}(\mu_3)$ jest energią stanu podstawowego systemu dwuciałowego, μ_3 jest dwucząstkową masą zredukowaną, ale dla przypadku trójciałowego.

6. Znaleźć dolne ograniczenia na energię stanu podstawowego systemu trójciałowego dla dwóch przypadków oddziaływania dwuciałowego (1). W przypadku coulombowskim dokładny wynik numeryczny wynosi $E^{(3)} = -1.067\, mb^4/\hbar^2$. Jak dobre jest nasze oszacowanie wynikające ze wzoru (6).

7. Problem trócialowy dla równych mas daje się rozwiązać dokładnie w przypadku oddziaływania harmonicznego przy użyciu zmiennych Jacobiego:

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\,,\ \vec{R}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2)\,,\ \vec{R}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)\,, \\ \vec{Q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\,,\ \vec{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{p}_3 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)\,,\ \vec{Q}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Zbadać relacje komutacji miedzy tymi operatorami.

8. Sprawdzić

$$\begin{aligned} Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \\ 3(R_1^2 + R_2^2) &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)^2. \end{aligned} \tag{8}$$

9. Przepisać trójciałowy hamiltonian z potencjałem harmonicznym w zmiennych Jacobiego i znaleźć energię stanu podstawowego.