Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 11

na dzień 7.1.2020. wtorek 8:30

sala A-0-13

1. **Atom wodoru metodą teoriogrupową - ciąg dalszy**

   Dla ruchu w potencjale Coulomba (problem Keplera) istnieje klasyczna całka ruchu, tzw. wektor Rungego-Lentza. Wektor ten można uogólnić na przypadek kwantowy, tzn. znaleźć odpowiadający mu operator. Pokazując, że w podprzestrzeni o zadanej energii operator ten wraz z operatorami krętu tworzą algebrę $O(4)$, można znaleźć spektrum atomu wodoru korzystając jedynie z własności operatorów krętu, bez rozwiązywania równania Schrödingera.

   Kwantowy operator Rungego-Lenza ma postać (dlaczego?):

   $$\vec{M} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{p}\right) - \frac{\kappa}{r}\vec{r}$$

   gdzie dla uproszczenia notacji pomijamy daszki nad operatorami. Wykazaliśmy że

   $$[M_i, H] = 0.$$

2. Udowodnić następujące relacje

   $$\vec{L}\cdot\vec{M} = \vec{M}\cdot\vec{L} = 0,$$

   podobnie jak w przypadku klasycznym, a także, że ($\hbar = 1$)

   $$\vec{M}^{\,2} = \frac{2H}{m}\left(\vec{L}^{\,2} + 1\right) + \kappa^2.$$

3. Następnie należy udowodnić relacje komutacji:

   $$\begin{aligned}[M_i, L_j] &= i\varepsilon_{ijk}M_k,\\ [M_i, M_j] &= -i\frac{2H}{m}\varepsilon_{ijk}L_k.\end{aligned}$$

   Przy udowadnaniu tych relacji komutacji (w każdym razie relacji $[M_i, M_j]$) warto zapisać M_i jako

   $$M_i = \frac{1}{m}\left(\vec{p}\times\vec{L} - i\,\vec{p}\right)_i - \frac{\kappa}{r}r_i$$

   pogrupować komutatory wg następującego schematu

	$(\vec{p}\times\vec{L})_i$	p_i	$\frac{1}{r}r_i$
$(\vec{p}\times\vec{L})_j$	$C_{ij}^{(1)}$	$C_{ij}^{(2)}$	$C_{ij}^{(4)}$
p_j	$C_{ij}^{(3)}$	0	$C_{ij}^{(6)}$
$\frac{1}{r}r_j$	$C_{ij}^{(5)}$	$C_{ij}^{(7)}$	0

gdzie $C_{ij}^{(m)}$ oznacza komutator operatora z górnego wiersza z operatorem z pierwszej kolumny, np.

$$C_{ij}^{(2)} = \left[p_i, (\vec{p} \times \vec{L})_j\right], \; C_{ij}^{(3)} = \left[(\vec{p} \times \vec{L})_i, p_j\right].$$

Dwa komutatory na diagonalnej są w trywialny sposób równe zero. W wyprowadzeniu relacji $[M_i, M_j]$ warto rozważać równocześnie parami wyrażenia leżące nad i pod diagonalną: $C_{ij}^{(2)} + C_{ij}^{(3)}$, $C_{ij}^{(4)} + C_{ij}^{(5)}$ oraz $C_{ij}^{(6)} + C_{ij}^{(7)}$ gdyż między tymi wyrażeniami zachodzą znaczące kasowania. Najtrudniejszy do policzenia jest komutator $C_{ij}^{(1)}$.