Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 10

na dzień 17.12.2019. wtorek 8:30

sala A-0-13

1. **Atom wodoru metodą teoriogrupową**

   Dla ruchu w potencjale Coulomba (problem Keplera) istnieje klasyczna całka ruchu, tzw. wektor Rungego-Lentza. Wektor ten można uogólnić na przypadek kwantowy, tzn. znaleźć odpowiadający mu operator. Pokazując, że w podprzestrzeni o zadanej energii operator ten wraz z operatorami krętu tworzą algebrę $O(4)$, można znaleźć spektrum atomu wodoru korzystając jedynie z własności operatorów krętu, bez rozwiązywania równania Schrödingera.

2. Wektor Rungego-Lenza zdefiniowany jest (klasycznie) jako

   $$\vec{M} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{L} - \frac{\kappa}{r}\vec{r},$$

   gdzie przyjmujemy postać potencjału $V(r) = -\kappa/r$ w hamiltonianie H. Wykazaliśmy, że jest on całką ruchu.

3. Dowieść, że

   $$\vec{L} \cdot \vec{M} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \vec{M}^{\,2} = \frac{2H}{m}\vec{L}^{\,2} + \kappa^2.$$

4. Kwantowy operator Rungego-Lenza ma postać (dlaczego?):

   $$\vec{M} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}\right) - \frac{\kappa}{r}\vec{r}$$

   gdzie dla uproszczenia notacji pomijamy daszki nad operatorami. Pokazać, że

   $$[M_i, L_j] = 0, \quad \vec{L} \cdot \vec{M} = \vec{M} \cdot \vec{L} = 0,$$

   a także, że

   $$\vec{M}^{\,2} = \frac{2H}{m}\vec{L}^{\,2} + \kappa^2$$

   tak jak w przypadku klasycznym.