Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 8

na dzień 3.12.2019. wtorek 8:30

sala A-0-13

Mieszanie neutrin dokończenie

1. Udowodnić, że macierz SU(N) zależy N^2-1 parametrów rzeczywistych. Najlepiej rozpisać warunek unitarności $U^\dagger U = 1$ na warunki, jakie spełniają kolumny macierzy U pomnożone przez wiersze macierzy $U^\dagger$, pamiętając że są to obiekty zespolone. Powtórzyć rachunek dla rzeczywistej macierzy ortogonalnej. Porównując liczbę parametrów tych macierzy, można wyliczyć ile spośród N^2-1 parametrów macierzy SU(N) to parametry rzeczywiste (kąty), a ile to fazy. Pokazać, że dla macierzy $U_{\alpha i} = \langle i | \, \alpha \rangle$ część z tych faz można wyelminować przez zaabsorbowanie ich do funkcji falowej poszczególnych stanów neutrinowych tak, że – w zgodzie z parametryzacją PMNS – dla $N = 3$ zostaje tylko jedna faza fizyczna, dla $N = 2$ macierz mieszania jest rzeczywista.

2. Korzystając z jawnej postaci macierzy mieszania $U_{\alpha i}$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   gdzie $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ oraz $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$wyliczyć (np. przy pomocy pakietu *Mathematica*) zaproponowany na poprzednich ćwiczeniach przez p. Marszałka niezmiennik J

$$J_{\rho k} = \varepsilon_{\alpha\beta\rho}\, \varepsilon_{ijk} \; \mathrm{Im}\left[U_{\alpha i} U^*_{\beta i} U_{\beta j} U^*_{\alpha j}\right], \tag{2}$$

   (który w literaturze nosi nazwę niezmiennika Jarlskog). Okaże się, że J nie zależy od ρ oraz k. Przedyskutować przypadki, dla których $J = 0$. Okaże się, że można wyzerować J dla $\delta \neq 0$. Jak zinterpretować ten wynik w świetle zadania 1.

3. Detekcja (antyneutrina) zachodzi poprzez reakcję

$$\bar{\nu}_l + p \to n + l^+$$

   gdzie $l^+ = \bar{e}, \bar{\mu}$. Czy można przy jej pomocy zaobserwować $\bar{\nu}_\mu$ jeżeli energia takiego neutrina wynosi 4 MeV? Masy cząstek wchodzących w tę reakcję wynoszą

$$m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}, \; m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}, \; m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}.$$

Rozpad beta jądra atomu trytu.

Tryt jest atomem, w którym jądro składa się z dwóch neutronów i jednego protonu. W przybliżeniu nieskończenie ciężkiego jądra poziomy energetyczne atomu trytu są identyczne z poziomami zwykłego atomu wodoru. W chwili t_0 jeden neutron w jądrze trytu rozpada się na proton, który pozostaje w jądrze, elektron o energii mniej więcej 15 keV i antyneutrino elektronowe. Rozpad zachodzi na tyle szybko, że funkcja falowa elektronu związanego w jądrze trytu (zakładamy, że elektron był w stanie podstawowym) pozostaje nie zmieniona. Jednakże nie jest to stan dozwolony dla nowopowstałego zjonizoawnego atomu helu, gdyż ładunek elektryczny jadra helu jest równy $2e$. Oczywiście energia takiego układu jest większa od energii helu w stanie podstawowym. Celem zadania jest przedyskutowanie co stanie się z elektronem związanym w atomie, a w szczególności, czy może on „wylecieć" jako elektron swobodny.

4. Proszę przyponieć sobie rozwiązania na poziomy energetyczne w atomie wodoropodobnym. W szczególności chodzi o strukturę poziomów i ich degenerację, definicję promienia Bohra, funkcję falową stanu podstawowego.

5. Na początku elektron znajdował się w stanie podstawowym hamiltonianu dla atomu trytu, który oznaczymy jako $|\psi_0\rangle$. Obliczyć (numerycznie) średnią wartość energi zjonizowanego atomu helu w tym stanie i porównać z energiami pierwszych kilku poziomów zjonizowanego atomu helu.

6. Napisać wzór na amplitudę prawdopodobieństwa, że elektron w stanie $|\psi_0\rangle$ znajdzie się w stanie $|n, l, m\rangle$ zjonizowanego atomu helu. Które z tych amplitud nie znikają? Obliczyć tę amplitudę dla stanu podstawowego $|1, 0, 0\rangle$ oraz podać odpowiadające mu prawdopodobieństwo (numerycznie).