Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 7

na dzień 26.11.2019. wtorek 8:30

sala A-0-13

Mieszanie neutrin c.d.

1. W rzeczywistości mieszanie zachodzi pomiędzy wszystkimi trzema rodzajami neutrin
$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i} |\nu_i\rangle , \ \alpha = e, \mu, \tau, \tag{1}$$
gdzie $U_{\alpha i}$ jest macierzą unitarną 3×3 (macierz Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). Macierz tę można sparametryzować w następujący sposób (trzy kąty i jedna faza)
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$
gdzie $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ oraz $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$.
Na poprzednich zajęciach wyprowadziliśmy wzór na prawdopodobieństwo
$$\begin{aligned} P_{\alpha\to\beta}(t) &= \delta_{\alpha\beta} - 2\sum_{i,j} \mathrm{Re}\left[U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right] \sin^2\left(\frac{\Delta E_{ij}t}{2}\right) \\ &\quad + \sum_{i,j} \mathrm{Im}\left[U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right] \sin\left(\Delta E_{ij}t\right). \end{aligned} \tag{3}$$
Korzystając z parametryzacji (2) wykazać, że $\mathrm{Im}[\ldots] \sim \sin\delta$.

2. Udowodnić, że macierz SU(N) zależy N^2-1 parametrów rzeczywistych. Najlepiej rozpisać warunek unitarności $U^\dagger U = 1$ na warunki, jakie spełniają kolumny macierzy U pomnożone przez wiersze macierzy $U^\dagger$, pamiętając że są to obiekty zespolone. Powtórzyć rachunek dla rzeczywistej macierzy ortogonalnej. Porównując liczbę parametrów tych macierzy, można wyliczyć ile spośród N^2-1 parametrów macierzy SU(N) to parametry rzeczywiste (kąty), a ile to fazy. Pokazać, że dla macierzy $U_{\alpha i} = \langle i | \, \alpha\rangle$ część z tych faz można wyelminować przez zaabsorbowanie ich do funkcji falowej poszczególnych stanów neutrinowych tak, że – w zgodzie z parametryzacją PMNS – dla $N=3$ zostaje tylko jedna faza fizyczna, dla $N=2$ macierz mieszania jest rzeczywista.

3. Detekcja (antyneutrina) zachodzi poprzez reakcję
$$\bar{\nu}_l + p \to n + l^+$$
gdzie $l^+ = \bar{e}, \bar{\mu}$. Czy można przy jej pomocy zaobserwować $\bar{\nu}_\mu$ jeżeli energia takiego neutrina wynosi 4 MeV? Masy cząstek wchodzących w tę reakcję wynoszą
$$m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}, \ m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}, \ m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}.$$