

# Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 6

na dzień 19.11.2019. wtorek 8:30

sala A-0-13

## Mieszanie neutrin

Jedną z cech oddziaływań słabych (rozpad beta), jest to, że stany własne hamiltonianu oddziaływania są różne od stanów własnych hamiltonianu swobodnego. Dotyczy to zarówno kwarków jak i neutrin. W przypadku neutrin stany własne hamiltonianu swobodnego (zwane też stanami masowymi) oznaczamy  $|\nu_i\rangle$ , gdzie  $i = 1, 2, 3$  (choć na początek „dla rozgrzewki” przyjmujemy na początek, że mamy tylko dwa takie stany), natomiast stany własne hamiltonianu oddziaływania (a więc także te stany które „widzimy” w detektorze, gdyż detekcja odbywa się poprzez oddziaływanie słabe neutrina z materiałem w detektorze) zwane stanami fizycznymi, to  $|\nu_\alpha\rangle$ , gdzie  $\alpha = e, \mu, \tau$ . Wadomo, że masy  $m_{1,2,3}$  są mniejsze od ułamka elektronowolta (masa elektronu to 0.5 MeV, czyli 500 000 razy więcej), natomiast różnice ich kwadratów  $\Delta m_{ij}^2 = |m_i^2 - m_j^2|$ :  $\Delta m_{12}^2 \sim 7.1 \times 10^{-5} \text{eV}^2$ ,  $\Delta m_{32}^2 \sim 2.5 \times 10^{-3} \text{eV}^2$ .

Typowym źródłem neutrin są reaktory jądrowe, które produkują  $\bar{\nu}_e$  o energiach rzędu 4 MeV. W górnych warstwach atmosfery cząstki promieniowania kosmicznego produkują neutrina o typowych energiach powyżej 100 MeV. Z kolei neutrina produkowane przez słońce mają energie rzędu kilkunastu MeV.

1. Na poprzednich zajęciach dyskutowaliśmy mieszanie w przypadku dwóch neutrin

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= |\nu_1\rangle \cos \theta + |\nu_2\rangle \sin \theta \\ |\nu_\mu\rangle &= -|\nu_1\rangle \sin \theta + |\nu_2\rangle \cos \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Wykazaliśmy, że prawdopodobieństwo, że powstałe w chwili  $t = 0$  neutrino elektronowe o energii  $E \simeq pc$  zostanie zidentyfikowane jako neutrino elektronowe w chwili  $t$  w detektorze odległym od źródła o  $l$  wynosi

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(\theta) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\pi \frac{l}{L}\right) \quad (2)$$

gdzie

$$L = \frac{4\pi\hbar c pc}{|\Delta m_{12}^2| c^4}. \quad (3)$$

2. Obliczyć  $L$  dla  $E \simeq pc = 4 \text{ MeV}$  oraz  $\Delta m_{12}^2 c^4 \simeq 10^{-4} \text{ eV}^2$ . Przyjmując, że odległość pokonana przez neutrino w czasie  $t$  wynosi  $l = ct$  wykreślić (np. przy pomocy pakietu *Mathematica*)  $P_e(l)$ .
3. Detekcja (antyneutrina) zachodzi poprzez reakcję

$$\bar{\nu}_l + p \rightarrow n + l^+ \quad (4)$$

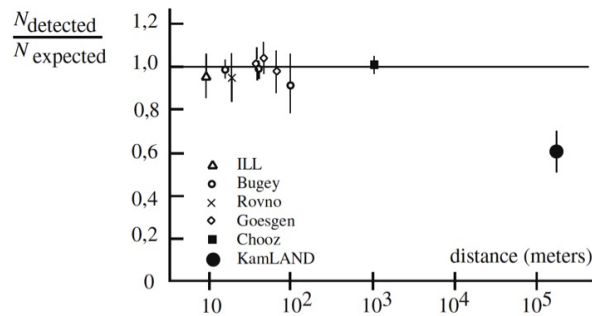
gdzie  $l^+ = \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$ . Czy można przy jej pomocy zaobserwować  $\bar{\nu}_\mu$  jeżeli energia takiego neutrina wynosi 4 MeV? Masy cząstek wchodzących w tę reakcję wynoszą

$$m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}, m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}, m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}.$$

4. Dokładność detektorów zliczających neutrina poprzez reakcję (4) wynosi około 10%. Zakładając maksymalne mieszanie, tj.  $\theta = \pi/4$ , obliczyć minimalną odległość  $l_{\min}$ , gdzie należy umieścić detektor, aby zaobserwować znaczący ubytek antyneutrino elektronowych powstałych w reaktorze. Jak  $l_{\min}$  zależy od  $\theta$ ? Dla jakiego kąta  $\theta$  dokładność detekcji 10% jest za duża, aby dało się zaobserwować oscylacje neutrin?
5. Kilka eksperymentów neutrinowych umieszczonych przy reaktorach dostarczyło następujące wyniki na wielkość, która mierzy prawdopodobieństwo oscylacji  $P_e(l) = N_{\text{detected}}/N_{\text{expected}}$ , gdzie  $N_{\text{detected}}$  to liczba zaobserwowanych neutrin a  $N_{\text{expected}}$  to liczba oczekiwana bez oscylacji ( $\theta = 0$ ):

odległość [m]	$P_e(l)$
9	0.95
16	0.98
19	0.95
37	1.01
40	0.99
47	1.04
66	0.98
100	0.91
1000	1.01
180000	0.61

które są pokazane na rysunku. Przedyskutować te wyniki nie uwzględniając ostatniego punktu eksperymentu KamLAND.



6. Eksperyment KamLAND został wykonany w Japoni i polegał na zmierzeniu strumieni neutrin elektronowych pochodzących z wielu różnych reaktorów w Japoni, a także z innych krajów, co spowodowało się do średniej odległości około 180 km. Posługując się także danymi dotyczącymi neutrin ze słońca KamLAND dofitował kąt mieszania oraz kwadrat różnicy mas

$$\Delta m_{12}^2 c^4 \simeq 7.1 (\pm 0.4) \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \tan^2 \theta = 0.45 (\pm 0.02)$$

Wykreślić  $P_e(l)$  dla tych parametrów razem z punktami doświadczalnymi.

7. W rzeczywistości mieszanie zachodzi pomiędzy wszystkimi trzema rodzajami neutrin

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} |\nu_i\rangle, \quad \alpha = e, \mu, \tau, \quad (5)$$

gdzie  $U_{\alpha i}$  jest macierzą unitarną  $3 \times 3$  (macierz Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). Macierz tę można sparametryzować w następujący sposób (trzy kąty i jedna faza)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  oraz  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ .

Stosujemy przybliżenie z zadania 1). W chwili  $t = 0$  produkuje się neutrino  $|\nu_\alpha\rangle$  o pędzie  $p$ . Obliczyć prawdopodobieństwo oscylacji  $P_{\alpha \rightarrow \beta}(t)$  wyrażając je przez długości oscylacji

$$L_{ij} = \frac{4\pi\hbar p}{\Delta m_{ij}^2} \quad (7)$$

oraz elementy  $U_{\alpha i}$  (nie używając parametryzacji (6)).

Wynik ten można uprościć przyjmując za doświadczeniem

$$m_{31}^2 \simeq m_{32}^2 = \Delta m_{\text{atm}}^2 \sim 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad m_{12}^2 = \Delta m_{\odot}^2 \sim 7.1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$$

(ciągle nie używając parametryzacji (6)). Obliczyć dla tych wielkości  $L_{12}$  oraz  $L_{23}$ .