Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 8

na dzień 6.12. czwartek 12:15

sala B-2-01

Mieszanie neutrin - dokończene

1. Detekcja (antyneutrina) zachodzi poprzez reakcję

$$\bar{\nu}_l + p \to n + l^+$$

gdzie $l^+ = \bar{e}, \bar{\mu}$. Czy można przy jej pomocy zaobserwować $\bar{\nu}_\mu$ jeżeli energia takiego neutrina wynosi 4 MeV? Masy cząstek wchodzących w tę reakcję wynoszą

$$m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}, \; m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}, \; m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}.$$

2. Udowodnić, że macierz SU(N) zależy $N^2 - 1$ parametrów rzeczywistych. Najlepiej rozpisać warunek unitarności $U^\dagger U = 1$ na warunki, jakie spełniają kolumny macierzy U pomnożone przez wiersze macierzy $U^\dagger$, pamiętając że są to obiekty zespolone. Powtórzyć rachunek dla rzeczywistej macierzy ortogonalnej. Porównując liczbę parametrów tych macierzy, można wyliczyć ile spośród $N^2 - 1$ parametrów macierzy SU(N) to parametry rzeczywiste (kąty), a ile to fazy. Pokazać, że dla macierzy $U_{\alpha_i} = \langle i | \alpha \rangle$ część z tych faz można wyelminować przez zaabsorbowanie ich do funkcji falowej poszczególnych stanów neutrinowych tak, że – w zgodzie z parametryzacją PMNS (poprzedni zestaw) – dla $N = 3$ zostaje tylko jedna faza fizyczna, dla $N = 2$ macierz mieszania jest rzeczywista.

Atom wodoru metodą teoriogrupową

Dla ruchu w potencjale Coulomba (problem Keplera) istnieje klasyczna całka ruchu, tzw. wektor Rungego-Lentza. Wektor ten można uogólnić na przypadek kwantowy, tzn. znaleźć odpowiadający mu operator. Pokazując, że w podprzestrzeni o zadanej energii operator ten wraz z operatorami krętu tworzą algebrę $O(4)$, można znaleźć spektrum atomu wodoru korzystając jedynie z własności operatorów krętu, bez rozwiązywania równania Schrödingera.

3. Wektor Rungego-Lenza zdefiniowany jest (klasycznie) jako

$$\vec{M} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{L} - \frac{\kappa}{r}\vec{r},$$

gdzie przyjmujemy postać potencjału $V(r) = -\kappa/r$ w hamiltonianie H. Wykazać (przy pomocy równania Hmiltona wyrażonego przez nawiasy Poissona), że $\vec{M}$ jest całką ruchu. Podobnie można wykazać, że całką ruchu jest $\vec{L}$.

4. Dowieść, że

$$\vec{L} \cdot \vec{M} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \vec{M}^{\,2} = \frac{2H}{m}\vec{L}^{\,2} + \kappa^2.$$

5. Kwantowy operator Rungego-Lenza ma postać (dlaczego?):

$$\vec{M} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}\right) - \frac{\kappa}{r}\vec{r}$$

gdzie dla uproszczenia notacji pomijamy daszki nad operatorami. Pokazać, że

$$[M_i, L_j] = 0, \quad \vec{L} \cdot \vec{M} = \vec{M} \cdot \vec{L} = 0,$$

a także, że

$$\vec{M}^{\,2} = \frac{2H}{m}\vec{L}^{\,2} + \kappa^2$$

tak jak w przypadku klasycznym.

c.d.n.