Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 7

na dzień 29.11. czwartek 12:15

sala B-2-01

Mieszanie neutrin - dokończene

Jedną z cech oddziaływań słabych (rozpad beta), jest to, że stany własne hamiltonianu oddziaływania są różne od stanów własnych hamiltonianu swobodnego. Dotyczy to zarówno kwarków jak i neutrin. W przypadku neutrin stany własne hamiltonianu swobodnego (zwane też stanami masowymi) oznaczamy $|\nu_i\rangle$, gdzie $i = 1, 2, 3$ (choć na początek „dla rozgrzewki" przyjmiemy na początek, że mamy tylko dwa takie stany), natomiast stany własne hamiltonianu oddziaływania (a więc także te stany które „widzimy" w detektorze, gdyż detekcja odbywa się poprzez odziaływanie słabe neutrina z materiałem w detektorze) zwane stanami fizycznymi, to $|\nu_\alpha\rangle$, gdzie $\alpha = e, \mu, \tau$. Wadomo, że masy $m_{1,2,3}$ są mniejsze od ułamka elektronovolta (masa elekrtonu to 0.5 MeV, czyli 500 000 razy więcej), natomiast różnice ich kwadratów $\Delta m_{ij}^2 = \left|m_i^2 - m_j^2\right|$: $\Delta m_{12}^2 \sim 7.1 \times 10^{-5}\mathrm{eV}^2$, $\Delta m_{32}^2 \sim 2.5 \times 10^{-3}\mathrm{eV}^2$.

Typowym źródłem neutrin są reaktory jądrowe, które produkują $\bar{\nu}_e$ o energiach rzędu 4 MeV. W górnych warstwach atmosfery cząstki promieniowania kosmicznego produkują neutrina o typowych energiach powyżej 100 MeV. Z kolei neutrina produkowane przez słońce mają energie rzędu kilkunastu MeV.

1. Detekcja (antyneutrina) zachodzi poprzez reakcję

$$\bar{\nu}_l + p \to n + l^+ \tag{1}$$

gdzie $l^+ = \bar{e}, \bar{\mu}$. Czy można przy jej pomocy zaobserwować $\bar{\nu}_\mu$ jeżeli energia takiego neutrina wynosi 4 MeV? Masy cząstek wchodzących w tę reakcję wynoszą

$$m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}, \; m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}, \; m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}.$$

2. Dokładność detektorów zliczających neutrina poprzez reakcję (1) wynosi około 10%. Zakładając maksymalne mieszanie, tj. $\theta = \pi/4$, obliczyć minimalną odległość $l_{\min}$, gdzie należy umieścić detektor, aby zaobserwować znaczący ubytek antyneutrin elektronowych powstałych w reaktorze. Jak $l_{\min}$ zależy od θ? Dla jakiego kąta θ dokładność detekcji 10% jest za duża, aby dało się zaobserwować oscylacje neutrin w przypadku mieszania dóch typów neutrin?

3. Zakładając, że – zgodnie doświadczniem

$$m_{31}^2 \simeq m_{32}^2 = \Delta m_{\mathrm{atm}}^2 \sim 2.5 \times 10^{-3}\mathrm{eV}^2, \; m_{12}^2 = \Delta m_\odot^2 \sim 7.1 \times 10^{-5}\mathrm{eV}^2$$

uprościć wyprowadzony na poprzednich zajęciach wzór na mieszanie neutrin w przypadku z trzema neutrinami i $\mathrm{Im}\,(\ldots) = 0$. Skorzystać z warunków unitarności. Obliczyć

$$L_{\mathrm{atm},\odot} = \frac{4\pi\hbar pc}{\Delta m_{\mathrm{atm},\odot}^2 c^4}. \tag{2}$$

dla energii neutrin reaktorowych $E = 4$ MeV. Obliczyć $\sin(\pi l/L)$ dla l =1 km i dla l =180 km.

4. Udowodnić, że macierz SU(N) zależy $N^2 - 1$ parametrów rzeczywistych. Najlepiej rozpisać warunek unitarności $U^\dagger U = 1$ na warunki, jakie spełniają kolumny macierzy U pomnożone przez wiersze macierzy $U^\dagger$, pamiętając że są to obiekty zespolone. Powtórzyć rachunek dla rzeczywistej macierzy ortogonalnej. Porównując liczbę parametrów tych macierzy, można wyliczyć ile spośród $N^2 - 1$ parametrów macierzy SU(N) to parametry rzeczywiste (kąty), a ile to fazy. Pokazać, że dla macierzy $U_{\alpha_i} = \langle i|\, \alpha\rangle$ część z tych faz można wyelminować przez zaabsorbowanie ich do funkcji falowej poszczególnych stanów neutrinowych tak, że – w zgodzie z parametryzacją PMNS (poprzedni zestaw) – dla $N = 3$ zostaje tylko jedna faza fizyczna, dla $N = 2$ macierz mieszania jest rzeczywista.