Wybrane zagadnienia z mechaniki kwantowej
egzamin pisemny 2

12.2.2019, godz. 13:30 sala B-2-02

Zegar atomowy

W atomach alkalicznych najbardziej zewnętrzny elektron jest na powłoce $n\,s$ (czyli w stanie o zerowym momencie pędu). Odziaływanie momentu magnetycznego tego elektronu ze spinem jądra powoduje rozszczepienie energii stanu podstawowego, które wykorzystywane jest do konstrukcji zegarów atomowych dużej dokładności używanych w urządzeniach GPS, w urządzeniach kontroli lotów w samolotach, i.t.d.

1. Rozpatrzmy oddziaływanie momentów magnetycznych jądra (N) i elektronu (e) w bazie iloczynowej:
$$|m_e; m_N\rangle = |e : s_e, m_e\rangle\, |N : s_N, m_N\rangle \tag{1}$$
gdzie spin elektronu $s_e = 1/2$ a spin jądra moze być całkiem duży (n.p. $s_N = 3/2$ dla rubidu lub $7/2$ dla cezu). Proszę określić degenarcję stanu (1) przed uwzględnieniem oddziaływania momentów magnetycznych.

   Rozwiązanie:

   Degeneracja wynosi $d = (2s_2 + 1)(2s_N + 1) = 2(2s_N + 1)$.

2. Hamiltonian oddziaływania spinu jądra ze spinem elektronu ma postać
$$H = \frac{A}{\hbar^2}\,\vec{S}_e \cdot \vec{S}_N, \tag{2}$$
gdzie $\vec{S}_{e,N}$ oznaczają odowiednio operatory spinu elektronu i jądra. Typowo wartości własne takiego hamiltonianu znajdujemy przechodząc do bazy całkowitego spinu. Tu jednak pozostaniemy w bazie iloczynowej (1) a wartości własne znajdziemy diagonalizując (2) w tej bazie. W tym celu wprowadzimy operatory podnoszenia i obniżania:
$$S_{e,N\,+} = S_{e,N\;x} + i\,S_{e,N\;y},\;\; S_{e,N\,-} = S_{e,N\;x} - i\,S_{e,N\;y}. \tag{3}$$

   (a) Proszę przepisać hamiltonian (2) przy użyciu operatorów (3).

   (b) Proszę obliczyć działanie H na stany $|m_e = 1/2; m_N\rangle$ oraz $|m_e = -1/2; m_N + 1\rangle$.

   (c) Powinno okazać się, że w podanej w punkcie (b) dwuwymiarowej podprzestrzeni hamiltonian H jest globalnie stabilny, tzn. jego działanie całkowicie ogranicza się do tej podprzestrzeni. Na ile takich dwuwymiarowych podprzestrzeni rozdziela się przestrzeń rozpięta przez stany (1)? Proszę zauważyć, że dla $m_N = s_N$ oraz $m_N = -s_N - 1$ mamy do dyspozycji tylko jeden stan (b) – dlaczego? – i w tych dwóch szczególnych przypadkach podprzestrzeń globalnie stabilna jest jednowymiarowa. Proszę wykazać, że całkowita degeneracja w bazie (b) przed uwzględnieniem oddziaływania (2) zgadza się z wynikiem zadania 1.

(d) Proszę wyliczyć jawną postać H w bazie z punktu (b), a następnie znaleźć wartości własne zarówno w przypadku dwuwymiarowych podprzestrzeni z $m_N = s_N - 1, s_N - 2, \ldots - s_N$, jak i jednowymiarowych $m_N = s_N, -s_N - 1$.

Rozwiązanie:

(a) Mamy

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-),\ S_y = \frac{i}{2}(S_- - S_+),$$

co daje (operatory w podprzestrzeniach e oraz N komutują)

$$\begin{aligned}\vec{S}_e \cdot \vec{S}_N &= \frac{1}{4}(S_{e+} + S_{e-})(S_{N+} + S_{N-}) - \frac{1}{4}(S_{e-} - S_{e+})(S_{N-} - S_{N+}) + S_{ez}S_{Nz} \\ &= \frac{1}{2}(S_{e+}S_{N-} + S_{e-}S_{N+}) + S_{ez}S_{Nz}.\end{aligned}$$

Czyli

$$H = \frac{A}{\hbar^2}S_{ez}S_{Nz} + \frac{A}{2\hbar^2}(S_{e+}S_{N-} + S_{e-}S_{N+}).$$

(b) Trzeba użyć $S_\pm |s, m\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}\, |s, m \pm 1\rangle$

$$\begin{aligned}H |m_e = 1/2; m_N\rangle &= \frac{A}{2}m_N\ |m_e = 1/2; m_N\rangle + \\ &\quad \frac{1}{2\hbar^2}S_{e-}S_{N+} |m_e = 1/2; m_N\rangle \\ &= \frac{A}{2}\left[m_N\ |m_e = 1/2; m_N\rangle + \right. \\ &\quad \left.\sqrt{s_N(s_N+1) - m_N(m_N+1)}\, |m_e = -1/2; m_N + 1\rangle\right], \\ H |m_e = -1/2; m_N + 1\rangle &= -\frac{A}{2}(m_N + 1)\ |m_e = -1/2; m_N + 1\rangle + \\ &\quad \frac{1}{2\hbar^2}S_{e+}S_{N-} |m_e = -1/2; m_N + 1\rangle \\ &= \frac{A}{2}\left[-(m_N + 1)\ |m_e = -1/2; m_N + 1\rangle + \right. \\ &\quad \left.\sqrt{s_N(s_N+1) - m_N(m_N+1)}\, |m_e = -1/2; m_N + 1\rangle\right].\end{aligned}$$

(c,d) Stąd w tej bazie dla $m_N = s_N - 1, s_N - 2, \ldots - s_N$ hamiltonian H jest macierzą dwuwymiarową

$$H = \frac{A}{2}\begin{bmatrix} m_N & \sqrt{s_N(s_N+1) - m_N(m_N+1)} \\ \sqrt{s_N(s_N+1) - m_N(m_N+1)} & -(m_N+1) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Takich dwuwymiarowych podprzestrzeni jest $2s_N$. Prócz tego mamy dwa szczególne przypadki

$$H |m_e = \pm 1/2; \pm s_N\rangle = \frac{A}{2}s_N |m_e = \pm 1/2; \pm s_N\rangle. \tag{5}$$

Zatem całkowita degeneracja wynosi $d = 2 \times 2s_N + 2 = 2(2s_N + 1)$ zgodnie z zad.1.

(d) Diagonalizacja H:

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda) &= -(m_N - \lambda)(m_N + 1 + \lambda) - s_N(s_N + 1) + m_N(m_N + 1) \\ &= \lambda^2 + \lambda - s_N(s_N + 1) = \lambda(\lambda + 1) - s_N(s_N + 1) = 0. \end{aligned}$$

Stąd rozwiazania

$$\lambda = s_N \text{ oraz } \lambda = -(s_N + 1).$$

A zatem rozszczepienia wynoszą (i nie zależą od m_N!)

$$\Delta E = \begin{cases} As_N/2 & 2s_N + 2 \text{ razy} \\ -A(s_N + 1)/2 & 2s_N \text{ razy} \end{cases} . \tag{6}$$

3. Porównując wartości rozszczepień otrzymane w poprzednim zadaniu z wartościami rozszczepień otrzymanych poprzez zdiagonalizowanie hamiltonianu (2) w bazie całkowitego spinu określić do jakiego całkowitego spinu należą poziomy rozszczepione-oddziaływaniem spinowym.

Rozwiązanie:

W zasadzie można na to pytanie odpowiedzieć bez rachunków. Całkowity spin układu jądro-elektron wynosi $s_N + 1/2$ lub $s_N - 1/2$. W pierwszym przypadku całkowita degeneracja wynosi $2(s_N + 1/2) + 1 = 2s_N + 2$ czyli odpowiada to energii $\Delta E = As_N/2$, natomiast w drugim przypadku $2(s_N - 1/2) + 1 = 2s_N$ co odpowiada $\Delta E = -A(s_N + 1)/2$.