Wybrane zagadnienia z mechaniki kwantowej
egzamin pisemny
24.1.2019, godz. 12:00 sala D-2-01

Pozytronium.

1. Pozytronium to układ elektronu i pozytonu opisany hamiltonianem

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{1}$$

Proszę rozseparować hamiltonian (1) na hamiltonian ruchu środka masy i ruchu względnego. Ile wynosi masa zredukowana w hamiltonianie ruchu względnego? Jaka jest struktura poziomów energetycznych hamiltonianu ruchu względnego i ile wynoszą degeneracje tych poziomów z uwzględnieniem spinu obu elektronów?

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 &= \frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 + \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}P^2 + 2p^2, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,\ \vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2).$$

Czynnik $1/2$ w definicji $\vec{p}$ wynika z ogólnego wzoru na masę zredukowaną dla czastek o różnych masach. Stąd

$$H = \frac{P^2}{2(2m)} + \frac{p^2}{2(m/2)} - \frac{e^2}{r}, \tag{3}$$

gdzie $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Masa zredukowana wynosi $\mu = m/2$. Poziomy energetyczne są analogiczne jak w atomie wodoru $\sim 1/n^2$ a degeneracja bez spinu wynosi n^2. W stanie podstawowym nie ma degeneracji bez spinu, a dodatkowo od spinu mamy degenerację $2 \times 2 = 4$.

2. Hamiltonian oddziaływania spin-spin ma postać

$$H_{SS} = \frac{\gamma}{\hbar^2}\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \tag{4}$$

gdzie $\gamma > 0$ jest dodatnią stałą proporjonalną do $|\psi(0)|^2$, gdzie ψ jest funkcją falową dla ruchu względnego. Proszę obliczyć rozszczepienia energetyczne energii stanu podstawowego pochodzące od H_{SS}, podać degeneracje i wypisać funkcje falowe

odpowiadające tym rozszczepieniom. W tym celu wystarczy pamiętać, ze funkcja spinowa odpowiadająca spinowi 0 jest antysymetryczna przy przestawieniu cząstek 1 i 2.

Rozwiązanie

Dwa spiny 1/2 można złożyć na $s = 0$ oraz 1.Podnosząc do kwadratu całkowity spin (opuszczając $\hbar^2$):

$$\vec{S}^{\,2} = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = s(s+1)$$

mamy

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}s(s+1) - \frac{3}{4} = \begin{cases} -3/4 & s = 0 \\ 1/4 & s = 1 \end{cases}. \tag{5}$$

Spinowi $s = 0$ odpowiada funkcja spinowa (z dokładnością do całkowitego znaku, który ustala się z konwencji Condona Shortleya dla współczynników Clebscha-Gordana, ale tu nie jest to istotne):

$$|\chi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{2}\right\rangle_2 - \left|\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle_2\right), \tag{6}$$

o energii $-3\gamma/4$, a spinowi $s = 1$ trzy funkcje

$$\begin{aligned} |\chi_{1\,1}\rangle &= \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle_2, \\ |\chi_{1\,0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{2}\right\rangle_2 + \left|\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle_2\right), \\ |\chi_{1\text{-}1}\rangle &= \left|\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{2}\right\rangle_2 \end{aligned} \tag{7}$$

odpowiadające energii $\gamma/4$.

3. Elektron i pozyton mogą zanihilować (w przeciwieństwie do elektronu i protonu w atomie wodoru), co prowadzi do dodatkowego hamiltonianu H_A, którego efektem jest przesunięcie poziomów o całkowitym spinie $s = 1$ o

$$\delta E^{s=1} = \frac{3}{4}\gamma. \tag{8}$$

Energia poziomów o całkowitym spinie $s = 0$ się nie zmienia. Ile wynoszą poprawki do energii stanu podstawowego od hamiltonianu

$$H_{SS} + H_A? \tag{9}$$

Rozwiązanie

Energia poziomu o spinie 0 się nie zmienia i wynosi dalej $-3\gamma/4$. Energia trzech poziomów o spinie 1 wynosi sumarycznie γ.

4. Pozytronium umieszczone zostaje w stałym polu magnetycznym $\vec{B}$ skierowanym wzdłuż osi z. Odpowiedni hamiltonian oddziaływania ma postać

$$H_B = 2\mu_B \vec{B} \cdot \left(\vec{S}_1 - \vec{S}_2\right), \tag{10}$$

gdzie μ_B jest magnetonem Bohra. Proszę uzasadnić dlaczego? Proszę zapisać macierz odpowaidającą H_B w bazie iloczynowej $\{|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle\}$, a nastepnie w bazie całkowitego spinu $\{|s, m\rangle\}$.

Rozwiązanie

Moment magnetyczny fermionu jest proporcjonalny do ładunku, stąd względny znak minus między momentami magnetycznymi elektronu i pozytonu. Czynnik 2 odpowiada czynnikowi giromagnetycznemu, który można wyprowadzić z równania Diraka. Działanie H_B w bazie iloczynowej:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle_2, \; |2\rangle = \left|\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle_2, \\ |3\rangle &= \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{2}\right\rangle_2, \; |4\rangle = \left|\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{2}\right\rangle_2, \end{aligned} \tag{11}$$

$$H_B |1\rangle = 0, \; H_B |2\rangle = -2\mu_B B\hbar |2\rangle, \; H_B |3\rangle = 2\mu_B B\hbar |3\rangle, \; H_B |4\rangle = 0 \tag{12}$$

czyli

$$H_B = 2\mu_B B\hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

W bazie całkowitego spinu (6) i (7), mamy

$$\begin{aligned} |1\rangle_{\text{tot}} &= |\chi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle - |3\rangle\right), \\ |2\rangle_{\text{tot}} &= |\chi_{1\text{-}1}\rangle = |4\rangle, \\ |3\rangle_{\text{tot}} &= |\chi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle + |3\rangle\right), \\ |4\rangle_{\text{tot}} &= |\chi_{11}\rangle = |1\rangle, \end{aligned} \tag{14}$$

co daje

$$H_B |1\rangle_{\text{tot}} = -2\mu_B B\hbar |3\rangle_{\text{tot}}, \; H_B |2\rangle_{\text{tot}} = 0, \; H_B |3\rangle_{\text{tot}} = -2\mu_B B\hbar |1\rangle_{\text{tot}}, \; H_B |4\rangle = 0. \tag{15}$$

Stąd w tej bazie

$$H_B = 2\mu_B B \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

5. Zapisać cały hamiltonian zaburzający

$$H' = H_{SS} + H_A + H_B \tag{17}$$

jako macierz w bazie $\{|s, m\rangle\}$. Następnie proszę obliczyć poprawki do energii pochodzące od H' i podać odpowiadające im degeneracje. Proszę określić jakie stany odpowiadają poszczególnym wartościom energii, a następnie schematycznie naszkicować zachowanie się poprawek pochodzących od H' w funkcji wartości pola magnetycznego B.

Rozwiązanie

W bazie $\{|s, m\rangle\}$ mamy zatem, przyjmując $\omega_B = 2\mu_B B$

$$H' = \begin{bmatrix} -3\gamma/4 & 0 & -\omega_B\hbar & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ -\omega_B\hbar & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Aby zdiagonalizować hamiltonian H' musimy polczyć wyznacznik

$$\det \begin{bmatrix} -3\gamma/4 - \lambda & 0 & -\omega_B\hbar & 0 \\ 0 & \gamma - \lambda & 0 & 0 \\ -\omega_B\hbar & 0 & \gamma - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - \lambda \end{bmatrix} = (\gamma - \lambda)^2 \det \begin{bmatrix} -3\gamma/4 - \lambda & -\omega_B\hbar \\ -\omega_B\hbar & \gamma - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

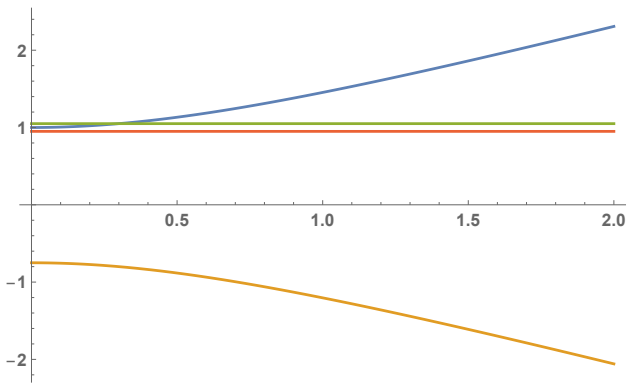
Ostatni wyznacznik

$$\det \begin{bmatrix} -3\gamma/4 - \lambda & -\omega_B\hbar \\ -\omega_B\hbar & \gamma - \lambda \end{bmatrix} = -\left(\frac{3}{4}\gamma + \lambda\right)(\gamma - \lambda) - (\omega_B\hbar)^2 = 0, \tag{19}$$

co daje (warto wprowadzić numerację poziomów zgodną $|\ldots\rangle_{\text{tot}}$ dla $\omega_B = 0$:

$$\lambda_{3,1} = \frac{\gamma}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{8}\gamma\right)^2 + (\omega_B\hbar)^2}, \tag{20}$$

pozostałe dwie poprawki do energii są $\lambda_{2,4} = \gamma$. Hamiltonian H' powoduje mieszanie stanów o całkowitym $s_3 = 0$. W granicy $\omega_B \to 0$ mamy $\lambda_1 \to -3\gamma/4$, $\lambda_3 \to \gamma$. Czyli na początku wszystke trzy stany o $s = 1$ są zdegenerowane, potem odszczepia się stan $s_3 = 0$ (stan $|4\rangle_{\text{tot}}$) który dostaje domieszkę $|1\rangle_{\text{tot}}$. Z kolei stan $|1\rangle_{\text{tot}}$ ma początkowo energię $-3\gamma/4$ i przesuwa się ze wzrostem B dostając domieszkę $|4\rangle_{\text{tot}}$.


2
1
0.5
1.0
1.5
2.0
−1
−2