Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa 1.a, zestaw 4

30.10.2006. poniedziałek, godz. 14:15

sala 001B

1. Układ z poprzedniego zestawu opisujący cząstkę o kręcie 1 ma hamiltonian postaci

$$H = A\frac{1}{\hbar}s_z + 2C\frac{1}{\hbar^2}s_x^2.$$

W chwili $t = 0$ cząstka jest w stanie własnym s_z do wartości własnej $+\hbar$. Obliczyć wartość oczekiwaną operatora spinu.

WSKAZÓWKA Układ ma następujące energie własne i odpowiadające im wektory własne:

$$E_0 = 2C, \quad \vec{e}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_\pm = C \pm \omega, \quad \vec{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\omega \mp A)}} \begin{bmatrix} \pm C \\ 0 \\ \omega \mp A \end{bmatrix}$$

(sprawdzić!!!), gdzie $\omega = \sqrt{A^2 + C^2}$. Zależne od czasu równanie Schrödingera ma rozwiązania postaci

$$\psi(t) = \alpha\,\vec{e}_0 \exp(-iE_0 t/\hbar) + \beta\,\vec{e}_+ \exp(-iE_+ t/\hbar) + \gamma\,\vec{e}_- \exp(-iE_- t/\hbar).$$

Stałe α, β i γ należy wyliczyć z warunku początkowego. Średnia wartość spinu wyraża się wzorem

$$\langle s_i \rangle (t) = \psi^*(t)\hat{s}_i\psi(t).$$

PROSZĘ POWYŻSZE ZADANIE PRZYGOTOWAĆ NA KARTKACH. KTÓRE ZOSTANĄ ZEBRANE NA ĆWICZENIACH.

2. Korzystając z twierdzenia Eckarta-Wignera proszę wypisać wszystkie elementy macierzowe operatora wektora wodzącego n_z w bazie stanów $|j = 1, m\rangle$. Wyliczając jawnie *jeden* z tych elementów proszę podać wartość zredukowanego elementu macierzowego.

3. Załóżmy, że elektron jest w stanie opisanym funkcją falową

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(e^{i\varphi}\sin\theta + \cos\theta\right) g(r)$$

gdzie $g(r)$ jest unormowana

$$\int_0^\pi dr\, r^2 \left|g(r)\right|^2 = 1.$$

Jakie są możliwe wyniki pomiaru L_z elektronu w tym stanie? Z jakim prawdopodobieństwem otrzymamy każdy z tych wyników? Jaka jest wartość oczekiwana L_z?

4. Hyperon Ω^- jest cząstką o spinie 3/2 i tzw. wewnętrznej parzystości +. Ω^- rozpada się na bezspinowy mezon K^- o wewnętrznej parzystości $-$ i hyperon Λ^0 o spinie 1/2 i wewnętrznej parzystości +:

$$\Omega^- \to K^- + \Lambda^0.$$

Jaką formę ma najogólniejszy rozkład kątowy mezonu K^- względem kierunku spinu Ω^- jeżeli spoczywający przed rozpadem hyperon Ω^- miał rzut spinu na oś z równy 3/2? Jakie ograniczenia na ten rozkład narzuca zachowanie parzystości?

WSKAZÓWKA:

Po pierwsze trzeba sobie odpowiedzieć na pytanie co to jest rozkład kątowy. W tym celu należy skonstruować f. falową mezonu K^- i wyliczyć jej moduł do kwadratu. Funkcja ta składa się z części spinowej $\chi^{s_3}_{s=1/2}$ i kątowej (funkcja kulista $Y_l^m(\theta,\varphi)$) złożonych odpowiednio przy pomocy wsp. Clebscha-Goradana na stan $|3/2, 3/2\rangle$. Takich funkcji mamy dwie (dlaczego?) i pełna f. falowa jest ich sumą z pewnymi (nieznanymi) współczynnikami. Parzystość f. kulistej wynosi $(-)^l$ (dlaczego?). Jeżeli parzystość ma być zachowana, to jeden z wymienionych wyżej współczynników musi się zerować. Za funkcje spinowe przyjąć unormowane wektory własne $\hat{S}_3$:

$$\chi^{1/2}_{s=1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi^{-1/2}_{s=1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

UWAGA: 6.11. odbędzie się kolokwium z dotychczasowego materiału.

http://th-www.if.uj.edu.pl/~michal/